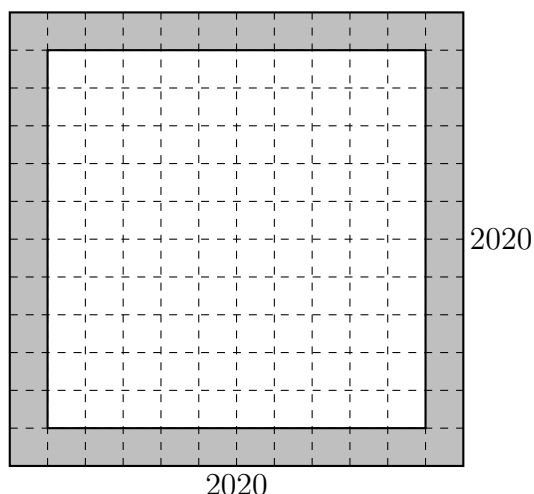
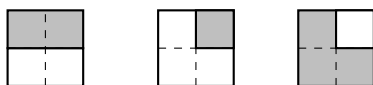


**Розв'язки кваліфікаційних задач
просунутий рівень (8–9 та 9–11 класи),
2 вересня 2020**

Задача 1. Кожна клітинка дошки 2020 на 2020 пофарбована в один з двох кольорів: чорний або білий. Відомо, що кожна з клітинок, яка має 2-х або 3-х сусідів за стороною, пофарбована в чорний колір. Також відомо, що з нашої дошки неможливо вирізати однокольоровий квадрат 2 на 2 . Доведіть, що з нашої дошки можна вирізати квадрат 2 на 2 клітинки якого пофарбовані в шаховому порядку.



Розв'язання. З умови задачі випливає, що краї дошки зафарбовані в чорний. Нехай не знайшлося квадрата 2 на 2 у шаховій розфарбовці. Тоді, з точністю до поворотів, квадрати 2 на 2 мають вигляд (за умовою серед них немає однокольорових):



Підрахуємо кількість D різнокольорових “доміношок” у всіх таких квадратах. $N = 2019 \cdot 2019$ — кількість таких квадратів. Тоді

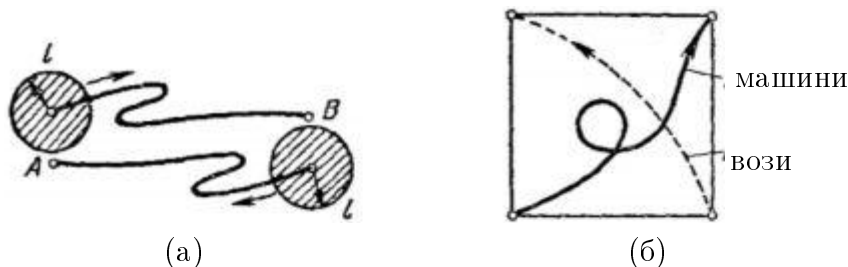
$$D = \frac{N \cdot 2}{2} = 2019 \cdot 2019.$$

(У кожному з таких квадратів по дві різнокольорові “доміношки” і кожна з них враховується двічі.)

Але в кожному рядку і кожному стовпці парна кількість різнокольорових “доміношок”. У будь-якому рядку (стовпці), де перша і остання клітинки чорні, а всі решта білі, буде парна кількість різнокольорових “доміношок”. При цьому при перефарбуванні клітинки (не крайньої) кількість різнокольорових “доміношок” залишається парною. Що протирічить непарності D .

Таким чином, наше припущення, що не знайшлося квадрата 2 на 2 у шаховій розфарбовці є невірним. $\square$

Задача 2. З міста A в місто B ведуть дві неперетинні дороги. Відомо, що дві машини, які виїхали по різних дорогах з A в B і зв’язані мотузкою деякої довжини, яка менша ніж $2l$, змогли проїхати з A в B не розірвавши мотузку. Чи можуть розминутися, не доторкнувшись один до одного, два круглих вози радіусів l , центри яких рухаються цими дорогами назустріч один одному.



Розв’язання. На рис. (а) зображено початкове положення возів. Розглянемо квадрат (рис. (б)):

$$M = \{x_1, x_2; 0 \leq x_i \leq 1\}.$$

Положення двох екіпажів (один на першій дорозі, інший — на другій дорозі) можна характеризувати точкою квадрату M : достатньо позначити через x_i долю відстані від A до B по i -й дорозі, що заключається між A і екіпажем на цій дорозі.

Всеможливим положенням екіпажів відповідають всеможливі точки квадрату M . (Цей квадрат називається *фазовим простором*, а його точки — *фазовими точками*.) Таким чином, кожна фазова точка відповідає певному положенню пари екіпажів, а будь-який рух екіпажів зображається рухом фазової точки у фазовому просторі.

Наприклад, початкове положення машин (в місті A) відповідає лівому нижньому куту квадрата ($x_1 = x_2 = 0$), а рух машин з A до B зображається кривою, що веде у протилежний кут.

Аналогічно, початкове положення возів відповідає правому нижньому куту квадрата ($x_1 = 0, x_2 = 1$), а рух возів зображається кривою, що веде у протилежний кут.

Але будь-які криві в квадраті, що з'єднують різні пари протилежних вершин, перетнуться. Тому, як би не рухалися вози, наступить момент часу у який пара возів займе положення у якому знаходилася пара машин у деякий момент часу. У цей момент часу відстань між центрами возів буде менша $2l$. Таким чином, розминутися возам не вдасться. $\square$

Задача 3. Уявіть собі замкнуту по колу залізницю. По ній їде поїзд, останній вагон якого скріплений з першим так, що всередині можна вільно переміщатися між вагонами. Ви опинилися в одному випадковому вагоні і ваше завдання — підрахувати їх загальну кількість. У кожному вагоні можна вмикати або вимикати світло, але початкове положення перемикачів випадкове і заздалегідь невідоме. Всі вагони всередині виглядають абсолютно однаково, вікна закриті так, що неможливо подивитися назовні, рух поїзда рівномірний. Позначати вагони будь-яким чином, крім включення або виключення світла, не можна. Кількість вагонів скінчена.

Розв'язання. Наведемо один з можливих варіантів розв'язання. Вам потрібно включити світло в початковому вагоні, де Ви знаходитися, якщо воно виключено. Потім рухатися в одну із сторін, поки не зустрінете вагон з включеним світлом, при цьому обов'язково рахуєте вагони, що пройшли. Виключаєте у знайденому вагоні світло і рухаєтеся назад до початкового вагону (Ви підраховували кількість вагонів для повернення). Якщо в ньому горить світло, то повторюєте алгоритм. Якщо ні, то Ви пройшли повне коло і знаєте відповідь. $\square$

Задача 4. У рівнобедреному $\triangle ABC$ ($AB = BC$) бісектриса AL удвічі більша за висоту BH . Знайдіть кути $\triangle ABC$.

Розв'язання. Нехай $\angle A = 2\alpha$. Добудуємо $\triangle ABC$ до ромба $ABCF$. Тоді $BF = 2BD = AE$, а тому трапеція $ABEF$ є рівнобічною. Отже, $\angle AFE = \angle BAF = 4\alpha$, а $\angle BFE = \angle BAE = \alpha$. Таким чином, $\angle ABF =$

$\angle AFB = 3\alpha$. З прямокутного $\triangle ABD$ отримуємо $2\alpha + 3\alpha = 90^\circ$, а тому $\alpha = 18^\circ$.

Відповідь: 36° , 36° та 108° . □

Задача 5. Доведіть, що, якщо

$$\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0,$$

то і

$$\frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = 0.$$

Розв'язання. Оскільки

$$\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0,$$

то

$$\left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} \right) \left(\frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b} \right) = 0.$$

Звідси

$$\begin{aligned} & \frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} + \frac{a}{b-c} \left(\frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b} \right) \\ & + \frac{b}{c-a} \left(\frac{1}{b-c} + \frac{1}{a-b} \right) + \frac{c}{a-b} \left(\frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} \right) = 0; \\ & \frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} + \frac{a}{b-c} \cdot \frac{c-b}{(c-a)(a-b)} \\ & + \frac{b}{c-a} \cdot \frac{a-c}{(b-c)(a-b)} + \frac{c}{a-b} \cdot \frac{b-a}{(b-c)(c-a)} = 0; \\ & \frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} + \frac{0}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 0. \end{aligned} \quad \square$$

Таким чином, ми довели, що

$$\frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = 0.$$

Задача 6. Розв'яжіть рівняння $a^b = b^a$ у натуральних числах.

Розв'язання. Очевидно, що підходить будь-яка пара $(n; n)$, де $n \in \mathbb{N}$.

Без обмеження загальності, будемо вважати, що $b > a \geq 1$. Тоді,

$$a^b = b^a \Leftrightarrow a^{b-a} = \left(\frac{b}{a}\right)^a \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^a \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{b}{a} \in \mathbb{N}.$$

Отже, $b = ak$, де $k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$. Тоді

$$a^{ak-a} = k^a \Rightarrow (a^{k-1})^a = k^a \Rightarrow a^{k-1} = k.$$

Якщо $a = 1$, то і $k = 1$, тому і $b = 1$, що протирічить умові $b > a \geq 1$. Тобто $a \geq 2$. Тоді

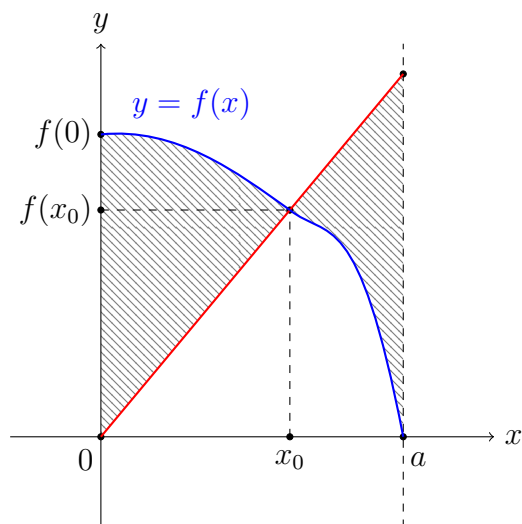
$$k = a^{k-1} \geq 2^{k-1} \Rightarrow k \geq 2^{k-1}.$$

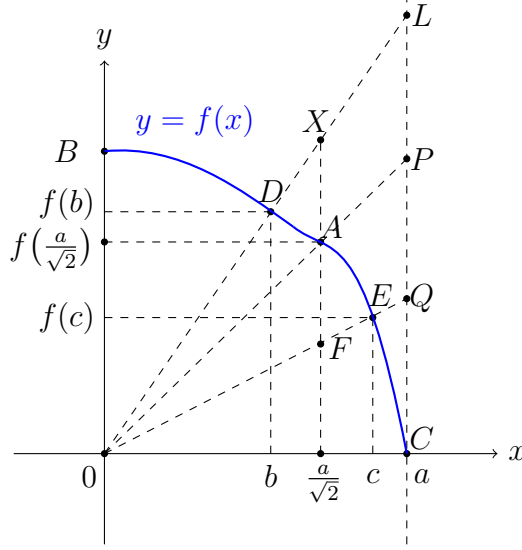
Можна легко показати, використовуючи індукцію, що $2^{k-1} > k$ для $k \geq 3$. Отже, $k < 3$, а тому $k = 2$. Таким чином, $a = 2$ і $b = 4$.

Пара $(2; 4)$ є єдиним розв'язком при $b > a \geq 1$. Аналогічно, при $a > b \geq 1$, єдиним розв'язком є $(4; 2)$.

Відповідь: $(2; 4)$, $(4; 2)$ та $(n; n)$, де $n \in \mathbb{N}$. □

Задача 7. Про незростаючу функцію $f: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ відомо, що $f(0) > 0$, $f(a) = 0$. Також відомо, що графік функції $y = f(x)$ можна побудувати не відриваючи олівця від зошита. Знайти на цьому графіку точку $(x_0, f(x_0))$, де $x_0 \in (0, a)$, що сума площ заштрихованих на малюнку мінімальна.





Розв'язання. Нехай $A(\frac{a}{\sqrt{2}}, f(\frac{a}{\sqrt{2}}))$. Розглянемо будь-яку точку $D(b, f(b))$, де $0 < b < \frac{a}{\sqrt{2}}$, як показано на рисунку. Покажемо, що

$$S_{OBD} + S_{LDC} > S_{OBA} + S_{PAC}.$$

Ця нерівність рівносильна нерівностям

$$\begin{aligned} S_{OBD} + S_{LDPA} + S_{PAC} &> S_{OBD} + S_{ODA} + S_{PAC} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow S_{LDPA} > S_{ODA} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow S_{LXAP} + S_{DXA} > S_{OXA} - S_{DXA}. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\frac{OA}{OP} = \frac{OX}{OL} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

то

$$\begin{aligned} S_{OAX} &= \frac{1}{2} S_{OLP} \Rightarrow S_{OAX} = S_{LXAP} \Rightarrow \\ &\Rightarrow S_{LXAP} + S_{DXA} > S_{OXA} - S_{DXA}. \end{aligned}$$

Розглянемо будь-яку точку $E(c, f(c))$, де $\frac{a}{\sqrt{2}} < c < a$, як показано на рисунку. Покажемо, що

$$S_{OBE} + S_{QEC} > S_{OBA} + S_{PAC}.$$

Ця нерівність рівносильна нерівностям

$$\begin{aligned} S_{OBA} + S_{OAE} + S_{QEC} &> S_{OBA} + S_{QEC} + S_{PAEQ} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow S_{OAE} > S_{PAEQ} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow S_{OAF} + S_{AFE} > S_{PAFQ} - S_{AFE}. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\frac{OA}{OP} = \frac{OF}{OQ} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

то

$$\begin{aligned} S_{OAF} &= \frac{1}{2} S_{OPQ} \Rightarrow S_{OAF} = S_{APQF} \Rightarrow \\ &\Rightarrow S_{OAF} + S_{AFE} > S_{PAFQ} - S_{AFE}. \end{aligned}$$

Таким чином, $x_0 = \frac{a}{\sqrt{2}}$ і $A(x_0, f(x_0))$ є шуканою точкою. $\square$

Задача 8. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$\begin{cases} 2x^2 + 4xy + 11y^2 \leq 1, \\ 4x + 7y \geq 3. \end{cases}$$

Розв'язання. Нехай $u = \sqrt{2}(x+y)$, $v = 3y$, тоді початкова система запишеться у вигляді

$$\begin{cases} u^2 + v^2 \leq 1, \\ 2\sqrt{2}u + v \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 \leq 1, \\ v \geq 3 - 2\sqrt{2}u. \end{cases}$$

Припустимо, що $u \geq \frac{3}{2\sqrt{2}}$, тоді $u^2 + v^2 \geq \frac{9}{8} > 1$, що протирічить нерівності $u^2 + v^2 \leq 1$. Отже, $u < \frac{3}{2\sqrt{2}}$, а тому

$$\begin{aligned} v \geq 3 - 2\sqrt{2}u > 0 &\Rightarrow v^2 \geq (3 - 2\sqrt{2}u)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow u^2 + (3 - 2\sqrt{2}u)^2 \leq u^2 + v^2 \leq 1 &\Rightarrow u^2 + (3 - 2\sqrt{2}u)^2 \leq 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow 9u^2 - 12\sqrt{2}u + 8 \leq 0 &\Rightarrow (3u - 2\sqrt{2})^2 \leq 0 \Rightarrow u = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 + v^2 \leq 1, \\ v \geq 3 - 2\sqrt{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} v^2 \leq \frac{1}{9}, \\ v \geq \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow v = \frac{1}{3} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2}(x+y) = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \\ 3y = \frac{1}{3} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{9}, \\ y = \frac{1}{9}. \end{cases} \end{aligned}$$

Відповідь: $x = \frac{5}{9}$, $y = \frac{1}{9}$. $\square$

Задача 9. Рівняння $3^x + 5^y = 7^z + 1$ має розв'язок $(x, y, z) = (1, 1, 1)$. Доведіть, що це рівняння не має інших розв'язків у натуральних числах.

Розв'язання. Розглянемо остачі від ділення лівої і правої частин на 3. Бачимо, що y — непарне, тому $y = 2a - 1$, де $a \in \mathbb{N}$:

$$3^x + 5^{2a-1} = 7^z + 1.$$

Розглядаючи остачі ділення останнього виразу на 8, знову бачимо, що x та z — непарні, $x = 2b - 1$, $z = 2c - 1$, де $b, c \in \mathbb{N}$:

$$3^{2b-1} + 5^{2a-1} = 7^{2c-1} + 1.$$

Далі розглядаючи остачі від ділення лівої і правої частин на 5, отримаємо, що $b = 2m - 1$, $c = 2n - 1$, де $m, n \in \mathbb{N}$. Тому

$$3^{4m-3} + 5^{2a-1} = 7^{4n-3} + 1.$$

Розглядаючи ліву і праву частин по модулю 16, знаходимо, що a — непарне, $a = 2k - 1$, де $k \in \mathbb{N}$. Тоді

$$3^{4m-3} + 5^{4k-3} = 7^{4n-3} + 1.$$

Варіанти: 1) $k = 1$, тоді $3^{4m-3} + 4 = 7^{4n-3}$. Припустимо, що $m \geq 2$, тоді $7^{4n-3} \equiv 4 \pmod{27}$. Зауважимо, що останнє неможливо, тому $m = 1$, а звідси $n = 1$. Таким чином, $(a, b, c) = (1, 1, 1)$.

2) $k \geq 2$, тоді $3^{4m-3} \equiv 7^{4n-3} + 1 \pmod{25}$, а, отже, $3^{4m-3} \equiv 8 \pmod{25}$, а звідси $m = 5l - 2$, де $l \in \mathbb{N}$. Тоді маємо, що

$$3^{20l-11} + 5^{4k-3} = 7^{4n-3} + 1.$$

Розглядаючи ліву і праву частин останнього співвідношення по модулю 7, отримаємо

$$\left[\begin{cases} l \equiv 2 \pmod{3}, \\ k \equiv 2 \pmod{3}, \\ l \equiv 0 \pmod{3}, \\ k \equiv 1 \pmod{3}, \end{cases} \Rightarrow (l + k - 1) \div 3.$$

Розглядаючи ліву і праву частин останнього співвідношення по модулю 9, отримаємо, що $(n - k - 1) \div 3$.

Розглядаючи ліву і праву частин останнього співвідношення по модулю 13, отримаємо, що $l \div 3$ та $n \equiv 1 \pmod{3}$. Але, враховуючи попередню сукупність, отримуємо, що $l \div 3$, $k \equiv 1 \pmod{3}$ та $n \equiv 1 \pmod{3}$, що протирічить з $(n - k - 1) \div 3$.

Відповідь: $(1, 1, 1)$ єдиний розв'язок.

□