

Семінар з підвищення кваліфікації вчителів фізики та математики (4 квітня 2026 року)

Лектор: Владислав Юрашев, *Викладач математики в Авторській школі Бойко*

Максимуми і мінімуми в геометрії

Екстремальні задачі — задачі на максимум і мінімум — у всі часи привертали увагу вчених. Зі спроб розв'язати ту чи іншу екстремальну задачу виникали й розвивалися нові теорії, а іноді й цілі напрями математики. У чому причина такого інтересу? По-перше, серед задач на максимум і мінімум багато красивих задач, які цікаво і приємно розв'язувати. Але люди займаються ними аж ніяк не тільки «з любові до мистецтва». Багато екстремальних задач, що лягають на письмовий стіл ученого, приходить із практики. Максимуми й мінімуми постійно виникають в інженерних розрахунках, в архітектурі, економіці... Крім того, екстремальні задачі найнесподіванішим чином знаходять застосування в науках про природу: фізиці, хімії, біології. Давно вже було помічено, що навколишній світ багато в чому влаштований за екстремальними законами. **Леонард Ейлер (1707—1783)**, один із найвидатніших математиків, говорив: «У світі не відбувається нічого, у чому б не було видно сенсу якого-небудь максимуму або мінімуму».

Ми будемо використовувати наступні методи для розв'язування екстремальних геометричних задач:

- 1) **Геометричні методи** (нерівність трикутника, осьова і центральна симетрія, метод випрямлення та інші);
- 2) **Використання нерівностей між середніми та інших;**
- 3) **Використання властивостей квадратного тричлена;**
- 4) **Методи математичного аналізу;**
- 5) **Векторно-координатний метод;**
- 6) **Комбіновані методи.**

Задачі, які використовують геометричні методи:

Задача №1

На площині дано пряму l і точки A та B по один бік від неї. Знайти на прямій точку M , для якої сума $AM + BM$ є найменшою.

Задача №2

На площині дано опуклий чотирикутник. Знайти точку, сума відстаней від якої до його вершин є найменшою.

Задача №3

Всередині гострого кута дано точку M . Знайти на сторонах кута точки A і B (по одній на кожній стороні), для яких периметр трикутника MAB є найменшим.

Задача №4 (Задача Фаньяно)

Вписати в даний гострокутний трикутник ABC трикутник найменшого периметра так, щоб на кожній стороні трикутника ABC лежала одна вершина вписаного трикутника.

Задача №5

Дано кут MAN і всередині нього точку O . Провести через точку O пряму, яка відтинає від даного кута трикутник найменшої площі.

Використання нерівностей між середніми:

Задача №6

Серед усіх прямокутників фіксованого периметра знайти той, площа якого максимально можлива.

Задача №7

Серед усіх трикутників фіксованого периметра знайти той, площа якого максимально можлива.

Задача №8

Серед усіх трикутників із фіксованою стороною та проведеною до неї висотою знайти той, периметр якого є мінімальним.

Задача №9

Знайти прямокутний паралелепіпед із найбільшим об'ємом серед усіх, що мають однакову площу повної поверхні.

Задача №10

Знайти правильну чотирикутну піраміду з найменшою площею бічної поверхні серед усіх пірамід із однаковим об'ємом.

Використання властивостей квадратного тричлена:

Задача №11

Знайти точку площини, для якої сума квадратів відстаней до n заданих точок є найменшою.

Методи математичного аналізу:

Задача №12

Через дану точку всередині кута провести пряму так, щоб сума $KA + KB$ була найменшою точка K — вершина кута, точки A і B — точки перетину прямої зі сторонами кута.

Задача №13

Через дану точку M , що лежить всередині кута, провести відрізок AB із кінцями на сторонах кута так, щоб величина $\frac{1}{MA} + \frac{1}{MB}$ була найбільшою.

Задача №14

Знайти рівнобедрений трикутник найменшої площі серед усіх, що описані навколо заданого кола.

Задача №15

Через дану точку всередині кута провести відрізок із кінцями на сторонах кута, що має найменшу довжину.