



БІБЛІОТЕКА ЖУРНАЛУ

МАТЕМАТИКА В ШКОЛАХ УКРАЇНИ

Випуск 2 (98)

О. Г. КУКУШ
Р. П. УШАКОВ

НА ДОПОМОГУ КЕРІВНИКАМ МАТЕМАТИЧНИХ ГУРТКІВ

• ФУНКЦІЇ
• ПЛАНІМЕТРІЯ
• СТЕРЕОМЕТРІЯ



Харків
Видавнича група «Основа»
2011

УДК 512
ББК 22.14
К88

Автори:

Кукуш Олександр Георгійович, доктор фіз.-мат. наук, професор КНУ ім. Т. Шевченка;
Ушаков Рудольф Петрович, заслужений учитель України

Кукуш О. Г., Ушаков Р. П.

К88 На допомогу керівникам математичних гуртків. Функції, планіметрія, стереометрія. — Х. : Вид. група «Основа», 2011. — 79, [1] с. — (Б-ка журн. «Математика в школах України»; Вип. 2 (98)).

ISBN 978-617-00-0804-6.

Пропонована книга, розрахована на широке коло читачів, які цікавляться математикою. Книга містить розділи: «Функції», «Планіметрія», «Стереометрія». Наведені матеріали можна використовувати як в індивідуальній роботі з учнями, так і в підготовці до проведення гуртків і факультативних занять.

**УДК 512
ББК 22.14**

ISBN 978-617-00-0804-6

© Кукуш О. Г., Ушаков Р. П., 2010
© ТОВ «Видавнича група «Основа», 2011

ЗМІСТ

Розділ I. ФУНКЦІЇ	4
Задача «Періодичні функції»	4
Графіки функцій, пов'язаних із символами $\max$ та $\min$	8
Розділ II. ПЛАНІМЕТРІЯ	25
Тригонометричні тотожності в трикутнику	25
Одна цікава геометрична тотожність	37
Про одну задачу з математичного фольклору	45
Розділ III. СТЕРЕОМЕТРІЯ	49
Про один цікавий метод знаходження відстані між двома мимобіжними прямими	49
Призматойд та його об'єм	56
1. Теорема Симпсона	56
2. Об'єм призматойда	58
Координатний метод розв'язування задач на тіла обертання	64
I. Площі поверхонь тіл обертання	64
II. Об'єми V тіл обертання	72

Розділ I. ФУНКЦІЇ

Задача «Періодичні функції»

Знайдіть основний період функції вигляду

$$f(x) = \sum_{k=1}^n A_k \operatorname{tg} \left(\frac{x}{m_k} + \varphi_k \right),$$

де $A_k \neq 0$ при всіх k , $m_1, \dots, m_n$ — попарно різні натуральні числа. Які узагальнення цієї задачі ви можете запропонувати, якщо замість функції tg розглядати інші періодичні функції?

Наведемо розв'язання, запропоноване кандидатом фізико-математичних наук Л. Л. Орядорогою (Донецьк). Воно елементарне й використовує певні відомості з теорії функцій комплексної змінної. Розв'язання ми розіб'ємо на частини.

Вважаємо, що $n \geq 2$,

$$m_1 > m_2 > \dots > m_n. \quad (1)$$

Нехай T — деякий (додатний) період функції $f(x)$. Доведемо, що тоді T є також періодом функції

$$f_1(x) = \sum_{k=1}^n A_k \operatorname{tg} \left(\frac{x}{m_k} + \varphi_k \right).$$

а) Функції $\sin x$ та $\cos x$ за допомогою формул Ейлера природно поширюються на комплексні значення аргумента. Справді, при $x \in \mathbb{R}$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$

де i — уявна одиниця.

При $z \in \mathbb{R}$ покладемо

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Зокрема, при $t \in \mathbb{R}$ маємо:

$$\sin(it) = \frac{e^{-t} - e^t}{2i} = i \frac{e^t - e^{-t}}{2} = i \cdot \text{sht}.$$

Тут sht — так званий гіперболічний синус. Аналогічно

$$\cos(it) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \text{cht},$$

де cht — так званий гіперболічний косинус.

Якщо $\cos z \neq 0$, то покладаємо

$$\text{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Тоді

$$\text{tg}(it+b) = \frac{\sin(it+b)}{\cos(it+b)} = \frac{\sin(it)\cos b + \cos(it)\sin b}{\cos(it)\cos b - \sin(it)\sin b},$$

$$\text{tg}(it+b) = \frac{i \cdot \text{sht} \cos b + \text{cht} \cdot \sin b}{\text{cht} \cdot \cos b - i \cdot \text{sht} \cdot \sin b} = \frac{i \cdot \text{tht} \cdot \cos b + \sin b}{-i \cdot \text{tht} \cdot \sin b + \cos b}.$$

Тут $\text{tht} = \frac{\text{sht}}{\text{cht}} = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = \frac{1 - e^{-2t}}{1 + e^{-2t}}$ — це гіперболічний тангенс.

б) При $t \rightarrow +\infty$ $\text{tht} \rightarrow 1$, причому

$$\text{tht} - 1 = -\frac{2e^{-2t}}{1 + e^{-2t}} \rightarrow (-2e^{-2t}).$$

Тут і надалі запис $g(t) - h(t)$ при $t \rightarrow +\infty$ означає, що

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{g(t)}{h(t)} = 1.$$

Далі,

$$\text{tg}(it+b) \rightarrow \frac{i \cdot \cos b + \sin b}{-i \cdot \sin b + \cos b} = i, \quad t \rightarrow +\infty,$$

причому при $t \rightarrow +\infty$

$$\text{th}(it+b) - i = \frac{i \cdot e^{ib} \cdot (\text{tht} - 1)}{\cos b - i \cdot \text{tht} \cdot \sin b} - \frac{i \cdot e^{ib}}{e^{-ib}} (\text{tht} - 1) - (-2ie^{ib}e^{-2t}).$$

в) Оскільки кожний доданок функції f поширюється на комплексну площину, то й уся функція природно продовжується на комплексну площину. Тоді при $t \rightarrow +\infty$

$$f(it) = \sum_{k=1}^n A_k \operatorname{tg} \left(\frac{it}{m_k} + \varphi_k \right) \rightarrow i \sum_{k=1}^n A_k,$$

$$f(it) - i \sum_{k=1}^n A_k = -2i \sum_{k=1}^n A_k \left(e^{2i\varphi_k} e^{\frac{2}{m_k}t} + o \left(e^{\frac{2}{m_k}t} \right) \right).$$

Тут $o(g(t))$ при $t \rightarrow +\infty$ позначає таку функцію $h(t)$, що

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h(t)}{g(t)} = 0.$$

Далі, враховуючи (1), маємо:

$$f(it) - i \sum_{k=1}^n A_k = -2i \cdot A_1 \cdot e^{2i\varphi_1} \cdot e^{\frac{2}{m_1}t} + o \left(e^{\frac{2}{m_1}t} \right).$$

Аналогічно

$$f(it+T) - i \sum_{k=1}^n A_k = -2i \cdot A_1 \cdot e^{2i \left(\varphi_1 + \frac{T}{m_1} \right)} \cdot e^{\frac{2}{m_1}t} + o \left(e^{\frac{2}{m_1}t} \right).$$

г) При $t \neq 0$ $\cos(it+b) \neq 0$, тому $\operatorname{tg}(it+b)$ визначено коректно. Функція $f(x)$ із умови задачі продовжується з $x \in D(f)$ до функції $f(z)$, $z \in (C \setminus R) \cup D(f)$. Зокрема, $f(it)$ визначена при всіх $t \neq 0$.

Оскільки T — деякий додатний період, то маємо тотожність:

$$f(x+T) = f(x), \quad x \in D(f).$$

Тоді за теоремою з комплексного аналізу про єдиність аналітичних функцій, замість x можна підставити it при $t \neq 0$. Утворюється нова тотожність:

$$f(it+T) = f(it), \quad t \neq 0, \quad t \in R.$$

Використовуючи розклади з пункту в), отримуємо:

$$-2i \cdot A_1 \cdot e^{\frac{2i}{m_1}t} \cdot \left(e^{2i \left(\varphi_1 + \frac{T}{m_1} \right)} - e^{2i\varphi_1} \right) = o \left(e^{\frac{2i}{m_1}t} \right).$$

Звідси

$$e^{2i \left(\varphi_1 + \frac{T}{m_1} \right)} = e^{2i\varphi_1}; \quad \frac{T}{m_1} = \pi l, \quad l \in Z.$$

Отже, T — період також і першого доданка функції $f(x)$, тому T — період функції $f_2(x)$, що не містить цього доданка. Ми довели шукане допоміжне твердження.

Міркуючи аналогічно, дістаємо, що T — період другого, третього і всіх наступних доданків.

д) Тоді $\frac{T}{\pi}$ ділиться на кожне з m_k , і тому $\frac{T}{\pi}$ ділиться на $\text{НСК}(m_1, \dots, m_n)$. Але $T_0 = \pi \cdot \text{НСК}(m_1, \dots, m_n)$ — це період $f(x)$. Отже, найменший додатний період дорівнює T_0 .

Відповідь. $\pi \cdot \text{НСК}(m_1, \dots, m_n)$.

Зауваження 1. Якщо в умові задачі числа m_k — довільні дійсні числа (попарно не рівні), то функція $f(x)$ буде періодичною тоді й лише тоді, коли при всіх k, j відношення

$$\frac{m_k}{m_j} \in \mathbb{Q}$$

(такі набори чисел називаються сумірними). При цьому формула для основного періоду залишається справедливою.

Зауваження 2. Як узагальнення розглянемо функції схожої структури:

$$g(x) = \sum_{k=1}^n A_k \sin\left(\frac{x}{m_k} + \varphi_k\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

де A_k, m_k задовольняють умову задачі. Тоді основний період

$$T_0 = 2\pi \cdot \text{НСК}(m_1, \dots, m_n).$$

Вказівка. Якщо T — період функції $g(x)$, то він буде й періодом функції

$$g''(x) = -\sum_{k=1}^n \frac{A_k}{m_k^2} \cdot \sin\left(\frac{x}{m_k} + \varphi_k\right).$$

Тоді T також буде періодом функції

$$g(x) + m_1^2 \cdot g''(x) = \sum_{k=2}^n A_k \cdot \left(1 - \frac{m_1^2}{m_k^2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x}{m_k} + \varphi_k\right).$$

Графіки функцій, пов'язаних із символами $\max$ та $\min$

У цій статті подано, як, знаючи графіки функцій $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$, ..., $y_n = f_n(x)$, побудувати графіки функцій

$$F(x) = \max(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$$

та

$$f(x) = \min(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$$

на спільній області визначення функцій $f_i(x)$. Подібні задачі зустрічались на вступних іспитах до вищих навчальних закладів. Прийняті позначення: (МДУ) — Московський державний університет, (КПІ) — національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»; (КНУ) — Київський національний університет імені Тараса Шевченка.

Знаком * позначені початок і кінець розв'язання прикладу.

Будемо використовувати таке твердження: якщо на деякому проміжку графік функції f_1 розташований не нижче (не вище) від графіка функції f_2 , то на цьому проміжку

$$\max(f_1(x), f_2(x)) = f_1(x), \quad (\min(f_1(x), f_2(x)) = f_2(x)).$$

Приклад 1. Побудуйте графік функції $y = \max(x-2, -2)$.

* На рис. 1 подано графіки функцій $y_1 = x-2$, $y_2 = -2$. Очевидно,

$$y = \max(y_1, y_2) = \begin{cases} -2 & \text{при } x \leq 0, \\ x-2 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Шуканий графік подано на рис. 2. *

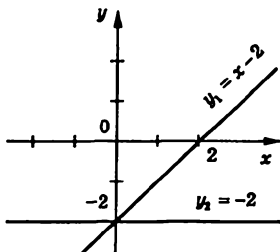


Рис. 1

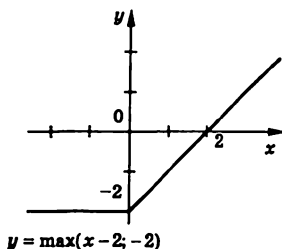


Рис. 2

Приклад 2

а) Побудуйте графік функції $y = \min\left(x+1, \frac{x+3}{3}, 5-x\right)$.

б) Доведіть нерівність $y \leq 2$.

в) Доведіть тотожність $y = 3 - \frac{1}{3}|x| - \frac{2}{3}|x-3|$.

г) Скільки коренів має рівняння $y = a$ залежно від значення a ?

д) Розв'яжіть рівняння $y = a$ (залежно від значення a).

* а) Побудуємо графіки функцій $y_1 = x+1$, $y_2 = \frac{x+3}{3}$, $y_3 = -x+5$

(рис. 3). Ми бачимо, що

$$y = \begin{cases} x+1 & \text{при } x < 0, \\ \frac{x+3}{3} & \text{при } 0 \leq x < 3, \\ -x+5 & \text{при } x \geq 3. \end{cases}$$

На рис. 4 подано графік функції y .

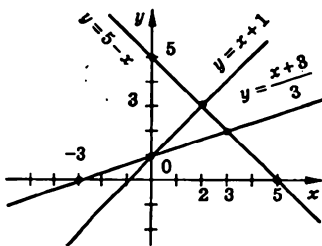


Рис. 3

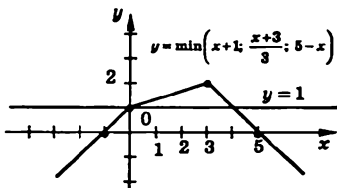


Рис. 4

б) За рис. 4 визначаємо, що $\max_{x \in \mathbb{R}} y = y(3) = 2$. Отже, $y \leq 2$.

в) Побудуємо графік функції

$$y = 3 - \frac{1}{3}|x| - \frac{2}{3}|x-3|.$$

Графіки цієї і заданої функції збігаються, отже, твердження в) справедливе.

г) Проводячи горизонтальні прямі з рівняннями $y = a$, встановлюємо, що рівняння має два корені при $a < 2$, один корінь при $a = 2$ і не має жодного кореня при $a > 2$.

д) При $a \leq 1$ $x+1=a$ або $5-x=a$, отже, при $a \leq 1$ $x=a-1$ або $x=5-a$.

При $1 < a \leq 2$ $\frac{x+3}{3} = a$ або $5-x=a$, отже, при $1 < a \leq 2$ $x=3a-3$ або $x=5-a$.

При $a > 2$ розв'язків немає. *

Приклад 3. (КНУ) а) Побудуйте графік функції

$$y = \max(x+2, 2-x-x^2).$$

б) Дослідіть функцію.

в) Скільки коренів залежно від a має рівняння $y=a$?

г) Розв'яжіть рівняння $y=a$.

д) При яких значеннях параметра a рівняння $y=a$ має рівно три корені?

* а) На рис. 5 подано графіки функцій

$$y_1 = x+2 \text{ та } y_2 = 2-x-x^2.$$

Очевидно,

$$y = \begin{cases} x+2 & \text{при } x < -2 \text{ або } x > 0, \\ 2-x-x^2 & \text{при } -2 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

Шуканий графік подано на рис. 6.

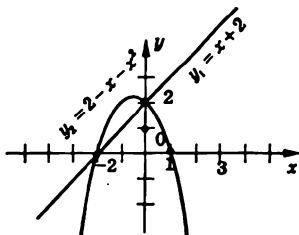


Рис. 5

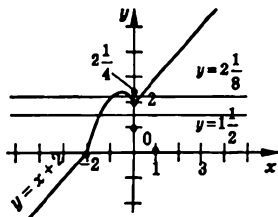


Рис. 6

б) $D(y) = \mathbb{R}$; функція має єдиний корінь $x = -2$, функція додатна при $x > -2$, від'ємна при $x < -2$; функція зростає на кожному з проміжків $(-\infty; -\frac{1}{2})$, $(0; +\infty)$; функція спадає на проміжку $(-\frac{1}{2}; 0)$;

функція має локальний максимум у точці $x = -\frac{1}{2}$, $y_{\max} = y\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\frac{1}{4}$

і локальний мінімум у точці $x = 0$, $y_{\min} = y(0) = 2$.

в) Проводячи горизонтальні прямі з рівняннями $y = a$, дістанемо, що рівняння $y = a$ має один корінь при $a < 2$ або $a > 2\frac{1}{4}$, два корені при $a = 2$ або $a = 2\frac{1}{4}$, три корені при $2 < a < 2\frac{1}{4}$.

г) При $a \leq 0$ $x = a - 2$, при $0 < a < 2$ $x = \frac{-1 - \sqrt{9 - 4a}}{2}$, при $a = 2$ $x = -1$ або $x = 0$, при $2 < a < 2\frac{1}{4}$ $x = \frac{-1 \pm \sqrt{9 - 4a}}{2}$ або $x = a - 2$, при $a = 2\frac{1}{4}$ $x = -\frac{1}{2}$ або $x = \frac{1}{4}$, при $a > 2$ $x = a - 2$.

д) Рівняння має рівно три корені при $2 < a < 2\frac{1}{4}$. *

Приклад 4 (КІП). Побудувати графік функції

$$y = \max\left(x; 1 + \sqrt{-x^2 + 6x - 5}\right).$$

* Область визначення заданої функції є множиною розв'язків нерівності

$$-x^2 + 6x - 5 \geq 0; 1 \leq x \leq 5.$$

Отже, $D(y) = [1; 5]$. Розглянемо функцію

$$y_1 = 1 + \sqrt{-x^2 + 6x - 5}; y_1 \geq 1, (y_1 - 1)^2 = -x^2 + 6x - 5,$$

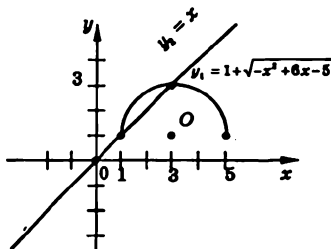


Рис. 7

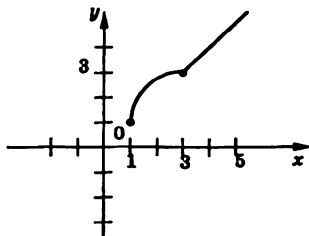


Рис. 8

$$(y_1 - 1)^2 = 4 - (x - 3)^2, \quad \begin{cases} (x - 3)^2 + (y_1 - 1)^2 = 4, \\ y_1 \geq 1. \end{cases}$$

Графіком функції y_1 є півколо з центром $(3, 1)$ і радіусом 2. На рис. 7 подано графіки функцій

$$y_1 = 1 + \sqrt{-x^2 + 6x - 5} \text{ та } y_2 = x.$$

Шуканий графік подано на рис. 8. *

Приклад 5 (КПІ). Побудувати графік функції

$$y = \min(x^2 + x - 1, x^2 + x - 3).$$

* Очевидно, $x^2 + x - 3 < x^2 + x - 1$ при $x \in \mathbb{R}$. Отже, $y = x^2 + x - 3$. Шуканий графік — це парабола $y = x^2 + x - 3$ (побудуйте її самостійно). *

Приклад 6 (МДУ)

а) Побудуйте графік функції $y = \min(2^x, 2^{-x})$.

б) Доведіть тотожність $\min(2^x, 2^{-x}) = 2^{-|x|}$.

в) Скільки коренів має рівняння $y = a$ залежно від значення параметра a ?

г) Розв'яжіть рівняння $y = a$.

д) При яких значеннях параметра a нерівність $y \leq a$ не має розв'язків?

е) При яких значеннях параметра a нерівність $y \leq a$ виконується при $x \in \mathbb{R}$?

ж) Розв'яжіть нерівність $y > a$.

* а) На рис. 9 подано графіки функцій $y_1 = 2^x$ та $y_2 = 2^{-x}$. Маємо

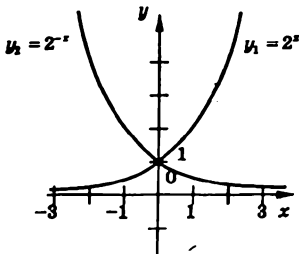


Рис. 9

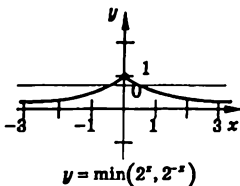


Рис. 10

$$y = \begin{cases} 2^x & \text{при } x < 0, \\ 2^{-x} & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

Шуканий графік подано на рис. 10.

б) Помітимо, що

$$2^{-|x|} = \begin{cases} 2^x & \text{при } x < 0, \\ 2^{-x} & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

Отже, $y = 2^{-|x|}$.

в) Проводячи горизонтальні прямі з рівняння $y = a$, бачимо, що при $a \leq 0$ або $a > 1$ коренів немає; при $a = 1$ рівняння має єдиний корінь $x = 0$; при $0 < a < 1$ рівняння має два корені.

г) Маємо рівняння $2^{-|x|} = a$ (див. пункт б). При $a \leq 0$ або при $a > 1$ коренів немає; при $a = 1$ $x = 0$; при $0 < a < 1$ $x = \pm \log_2 \frac{1}{a}$.

д) При $a \leq 0$ нерівність $y \leq a$ не має розв'язків.

е) При $a > 1$ нерівність $y \leq a$ виконується при $x \in \mathbb{R}$.

ж) При $a \geq 1$ $x \in \mathbb{Q}$; при $0 < a < 1$, $-\log_2 \frac{1}{a} < x < \log_2 \frac{1}{a}$; при $a \leq 0$ $x \in \mathbb{R}$. *

Приклад 7 (КНУ). Побудуйте графік функції $y = \min(\sin x, \cos x)$, $0 \leq x \leq 2\pi$.

* На рис. 11 подано графіки функцій

$$y_1 = \sin x \quad (0 \leq x \leq 2\pi), \quad y_2 = \cos x \quad (0 \leq x \leq 2\pi).$$

Шуканий графік подано на рис. 12. *

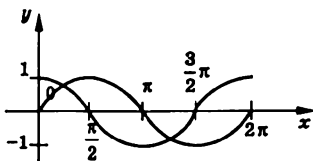


Рис. 11

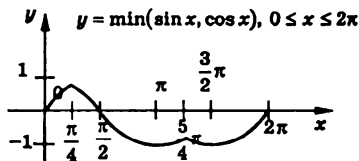


Рис. 12

Приклад 8 (КПІ)

а) Побудуйте графік функції $y = \max\left(x, \frac{1}{x}\right)$.

б) Дослідіть цю функцію.

в) Розв'яжіть рівняння $y = a$.

г) Розв'яжіть нерівність $y > a$.

* На рис. 13 подано графіки функцій $y_1 = x$, $y_2 = \frac{1}{x}$ (на графіку функції $y = x$ вилючено точку $O(0;0)$). Шуканий графік подано на рис. 14. Маємо

$$y = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{при } x < -1 \text{ або } 0 < x < 1, \\ x & \text{при } -1 \leq x < 0 \text{ або } 1 \leq x. \end{cases}$$

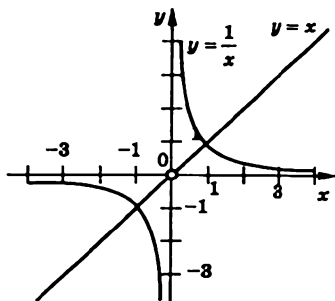


Рис. 13

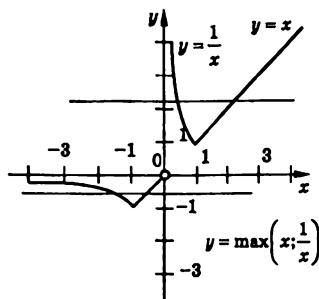


Рис. 14

б) $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Далі

$y > 0$ при $x > 0$, $y < 0$ при $x < 0$.

Функція не має коренів (нулів).

Функція спадає на кожному з проміжків $(-\infty; -1)$ та $(0; 1)$, зростає на кожному з проміжків $(-1; 0)$ та $(1; +\infty)$.

$$\min_{x \in D(y)} y = y(-1) = -1, \quad y_{\max} = y(1) = 1.$$

Графік функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$ (на $-\infty$) та вертикальну асимптоту — вісь Oy .

в) При $a < -1$ розв'язків немає, при $a = -1$ є один розв'язок $x = -1$, при $-1 < a < 0$ є два розв'язки $x_1 = \frac{1}{a}$, $x_2 = a$, при $0 < a < 1$ розв'язків немає, при $a = 1$ є один розв'язок $x = 1$, при $a > 1$ є два розв'язки $x_3 = \frac{1}{a}$, $x_4 = a$.

г) При $a < -1$ $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

При $a = -1$ $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty)$.

При $-1 < a < 0$ $x \in \left(-\infty; \frac{1}{a}\right) \cup (a; 0) \cup (0; +\infty)$.

При $0 \leq a < 1$ $x \in (0; +\infty)$.

При $a = 1$ $x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

При $a > 1$ $x \in \left(0; \frac{1}{a}\right) \cup (a; +\infty)$. *

Приклад 9 (МДУ). Яку найбільшу кількість коренів може мати рівняння $\max(\sin x, \ln x) = a$ залежно від значень параметра a ?

На рис. 15 показано графіки функцій $y_1 = \sin x$ (без точки $O(0; 0)$) та $y_2 = \ln x$. На проміжку $\left(\frac{\pi}{2}; e\right)$ функція y_1 спадає, а функція y_2 зростає. Оскільки обидві функції неперервні, то на проміжку $\left(\frac{\pi}{2}; e\right)$ рівняння $\sin x = \ln x$ має єдиний корінь x_0 . На рис. 16 подано графік функції $y = \max(\sin x, \ln x)$.

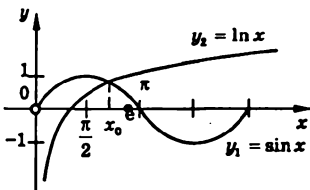


Рис. 15

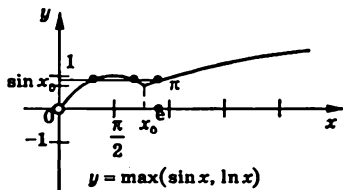


Рис. 16

За графіком встановлюємо, що при $a \leq 0$ коренів немає; при $a \in (0; \sin x_0)$ або $a \in (1; +\infty)$ є один корінь; при $a = \sin x_0$ або $a = 1$ — два корені; при $a \in (\sin x_0; 1)$ — три корені.

Відповідь. Три. *

Приклад 10 (МДУ). Побудуйте графік функції

$$y = \min_{-1 \leq x \leq 1} (a^2 - 2ax).$$

* Помітимо, що $a^2 - 2ax = (a-x)^2 - x^2$.

Враховуючи, що $|a| \leq 1$, маємо три випадки.

1) $|x| \leq 1$. $(a-x)^2 - x^2 \geq -x^2$, причому рівність досягається лише при $x = a$. Отже, при $|x| \leq 1$ $y = -x^2$.

2) $x > 1$. Тепер рівність $x = a$ не досягається, бо $x > a$. Помітимо, що при $x > 1$ $(a-x)^2 - x^2 \geq (1-x)^2 - x^2$.

Дійсно,

$$(a-x)^2 - x^2 \geq (1-x)^2 - x^2 \Leftrightarrow |a-x| \geq |1-x| \Leftrightarrow x-a \geq x-1 \Leftrightarrow a \leq 1,$$

що справедливо. Отже, при $x > 1$

$$y = (1-x)^2 - x^2 = 1-2x; \quad y_{\min} = y(1).$$

3) $x < -1$. Міркуючи аналогічно пункту 2), дістанемо, що

$$y = 1+2x \quad y_{\min} = y(-1).$$

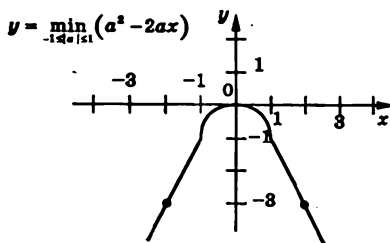


Рис. 17

Таким чином, графік поданої функції складається з трьох частин:

$$y = \begin{cases} 1+2x & \text{при } x < -1, \\ -x^2 & \text{при } -1 \leq x \leq 1, \\ 1-2x & \text{при } x > 1. \end{cases} *$$

Приклад 11. Побудуйте графік функції

$$y = \max(\min(|x|, 1), 1-x^2).$$

* На рис. 18а та 18б відповідно показано графіки функцій

$$y_1 = \min(|x|, 1) \text{ та } y_2 = 1-x^2.$$

Шуканий графік подано на рис. 19. Зверніть увагу на те, що

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}. *$$

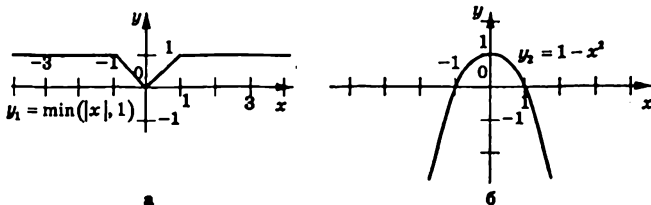


Рис. 18

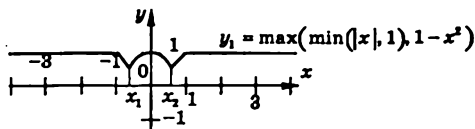


Рис. 19

Приклад 12 (КНУ)

а) Побудуйте графік функції $y = \max(\min(x^2, 1 - x^2), -1)$.

б) Скільки коренів має рівняння $y = a$ залежно від значень параметра a ?

в) При яких значеннях параметра a нерівність $y < a$ виконується при $x \in \mathbb{R}$?

* а) На рис. 20 подано графік функції $y = \min(x^2, 1 - x^2)$. Зазначимо, що $\max_{x \in \mathbb{R}} y = y\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

На рис. 21 подано шуканий графік.

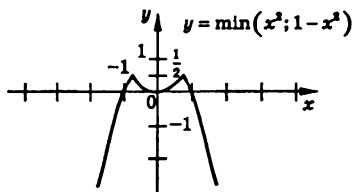


Рис. 20

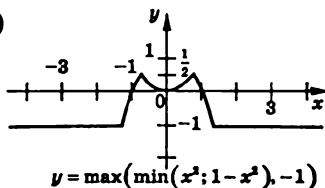


Рис. 21

б) При $a < -1$ або $a > \frac{1}{2}$ коренів немає.

При $a = -1$ безліч коренів.

При $a = \frac{1}{2}$ або $-1 < a < 0$ два корені.

При $a = 0$ три корені.

При $0 < a < \frac{1}{2}$ чотири корені.

в) При $a > \frac{1}{2}$ нерівність $y < a$ виконується при $x \in R$. *

Вправи

1. Побудуйте графік і дослідіть функцію:

а) $y = \min(x, 1)$;

б) $y = \max(x, 1 - x)$;

в) $y = \min(x - 1, 2 - x, 2x + 1)$;

г) $y = \max(-x^2, -1 - x)$;

д) (МДУ) $y = \max\left(2 + \sqrt{-x^2 + 8x - 12}, 3\right)$;

е) $\max(|x - 1|, 3 - |x - 2|)$.

2. Розв'яжіть рівняння:

а) (КНУ) $\min\left(\sqrt{x}, \sqrt{4 - x}, \frac{(x - 4)^2}{2\sqrt{2}}\right) = a$;

б) $\min(\sqrt{x}, \sqrt{2 - x}) = a$;

в) $\max(\sqrt{x}, 2 - x) = a$;

г) (КНУ) $\min(2^x; 2^{-x}) = a$;

д) (КІІІ) $\min(\arctg x, \operatorname{arccotg} x) = a$;

е) $\min(|x|, 1 - x^2) = a$;

ж) $\max(|x - 2|, x) = a$.

3. Скільки коренів має рівняння $y = a$ залежно від значення параметра a ?

а) (КІІІ) $y = \max(|x|, \sqrt{1 - x^2})$;

б) $y = \max(\ln x, 1 - x)$;

в) (КНУ) $y = \max(1 - x, 5^x)$;

г) $y = \min(\sin x, \cos x) = a$ при $0 \leq x \leq \pi$;

д) (МДУ) $y = \min\left(x, \frac{x-1}{x+2}\right) = a$;

е) (КНУ) $y = \min(|x+1|, 2-x)$.

4. При яких значеннях параметра a не має розв'язків нерівність $y > a$?

а) $y = \min(|x|, 1)$;

б) (КНУ) $y = \min(1, 2^x)$;

в) $y = \min(\sqrt{x}, 1)$;

г) $y = \min(1-|x|, \sqrt{|x|})$;

д) (КНУ) $y = \max(\min(|x|, 1), 1-x^2)$;

е) $y = \max(x^2-1, 1-x^2)$.

5. При яких значеннях параметра a нерівність $y < a$ виконується при будь-якому x із області визначення?

а) (КНУ) $y = \min(8^x, 3^{-x})$;

б) $y = \min(\sqrt{x+2}, \sqrt{6-x})$;

в) (КПІ) $y = \max\left(\frac{1}{2}, 1-|x|\right)$;

г) $y = \max(1-x^2, 0)$;

д) (КНУ) $y = \min(x, 1-x, -2)$.

6. Доведіть тотожність:

а) $\max(x, -x) = |x|$;

б) $\min\left(x-3, 6-\frac{4}{3}x, 3-\frac{x}{3}\right) = \frac{3}{2} - \frac{x}{6} - \frac{7}{6}\left|x-\frac{27}{7}\right|$;

в) $\min\left(x, 4-x, \frac{1}{2}x-2\right) = -\frac{|x+4|}{4} - \frac{3|x-4|}{4} + 2$;

г) $\max(3x, 2x-1) = \frac{|x+1|}{2} + \frac{5x}{2} - \frac{1}{2}$.

7. Розв'яжіть нерівність:

а) (КПІ) $\min(2-|x|, x^2) > a$;

б) (КПІ) $\min(\sqrt{x+3}, \sqrt{5-x}) \leq a$;

в) (КНУ) $\max\left(\frac{1}{|x|}, x\right) > a$;

г) (КНУ) $\min(\max(2^x, 2^{-x}), 2) < a$.

8. Доведіть нерівність:

а) (КПІ) $0 \leq \min(|1-x^2|, 1) \leq 1$;

б) (МДУ) $0 \leq \min(\sqrt{x+2}, \sqrt{4-x}) \leq \sqrt{3}$;

в) (КПІ) $0 \leq \min(x^2, x+2) \leq 4$;

г) (КПІ) $\min(|x|, 1-|x|) \leq \frac{1}{2}$;

д) (МДУ) $-1 \leq \min(\sin x, \cos x) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$;

е) (КНУ) $\frac{1}{2} \leq \max\left(\min(e^x, e^{-x}), \frac{1}{2}\right) \leq 1$.

Відповіді до вправ

1. а) Рис. 22; б) рис. 23; в) рис. 24; $D(y) = R$. $y < 0$ при $x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$; $y > 0$ при $x \in (1; 2)$, $y = 0$ при $x = 1$ або $x = 2$.

Функція зростає при $x \in (-\infty; 1.5)$, спадає при $x \in (1.5; +\infty)$,

$$\max_{x \in R} y = y(1.5) = 0.5.$$

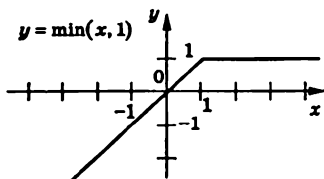


Рис. 22

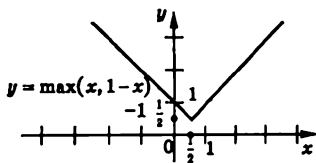


Рис. 23

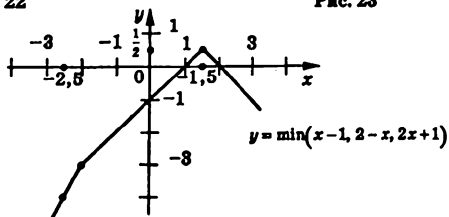


Рис. 24

г) Рис. 25 $D(y) = R$. Функція додатна при $x < -1$, від'ємна при $-1 < x < 0$ або $x > 0$. Функція має два корені $x_1 = -1$, $x_2 = 0$. Функція спадає на кожному з проміжків $\left(-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ та $(0; +\infty)$. Функція зростає при $x \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 0\right)$. Функція має дві екстремальні точки.

$$y_{\min} = y\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{\sqrt{5}-3}{2}, \quad y_{\max} = y(0) = 0.$$

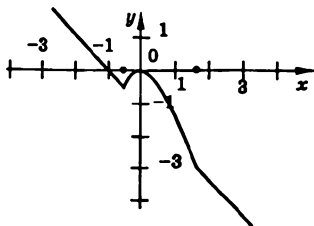


Рис. 25

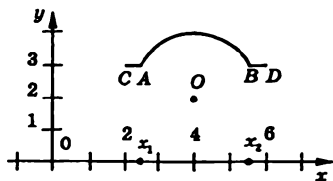


Рис. 26

д) Шуканий графік подано на рис. 26. Це дуга кола з радіусом 2 і центром $O(4; 2)$ і два відрізки — CA і BD .

$$C(2; 3), A\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 3\right), B\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 3\right), D(6; 3).$$

е) (Рис. 27)

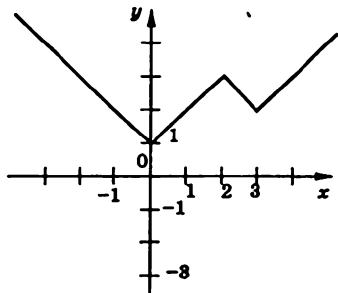


Рис. 27

$$y = \begin{cases} 1-x & \text{при } x < 0, \\ 1+x & \text{при } 0 \leq x \leq 2, \\ 5-x & \text{при } 2 \leq x \leq 3, \\ x-1 & \text{при } x \geq 3. \end{cases}$$

$D(y) = R$, $y > 0$ при $x \in R$. Функція зростає на кожному з проміжків $(0; 2)$ та $(3; +\infty)$, спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$, $(2; 3)$
 $\min_{x \in R} y = y(0) = 1$. Функція має два локальних екстремуми

$$y_{\max} = y(2) = 3, \quad y_{\min} = y(3) = 2.$$

2. а) При $a < 0$ або $a > \sqrt{2}$ коренів немає.

$$\text{При } a = \sqrt{2} \quad x = 2.$$

При $0 \leq a \leq 2$ є два корені: $x_1 = a^2$, $x_2 = 4 - \sqrt{2\sqrt{2}a}$.

б) При $a > 1$ або $a < 0$ коренів немає.

$$\text{При } a = 1, \quad x = 1.$$

При $0 \leq x < 1$ є два корені: $x_1 = a^2$, $x_2 = 2 - a^2$.

в) При $a < 1$ або $a > \sqrt{2}$ коренів немає.

$$\text{При } a = 1 \quad x = 1.$$

При $1 < a \leq \sqrt{2}$ є два корені: $x_1 = 2 - a^2$, $x_2 = a^2$.

г) При $a \leq 0$ або $a > 1$ коренів немає.

$$\text{При } a = 1 \quad x = 0.$$

При $0 < a < 1$ є два корені: $x_{1,2} = \pm \log_2 a$.

д) При $a \leq -\frac{\pi}{2}$ або $a > \frac{\pi}{4}$ коренів немає.

$$\text{При } a = \frac{\pi}{4} \quad x = 1.$$

При $0 < a < \frac{\pi}{4}$ є два корені: $x_1 = \operatorname{tga}$, $x_2 = \operatorname{ctga}$.

$$\text{При } a = 0 \quad x = 0.$$

$$\text{При } -\frac{\pi}{2} < a < 0 \quad x = \operatorname{tga}.$$

е) При $a > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ коренів немає.

При $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ є два корені: $x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

При $0 < a < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ є чотири корені: $x_1 = -\sqrt{1-a}$, $x_2 = -a$, $x_3 = a$,

$$x_4 = \sqrt{1-a}.$$

При $a = 0$ є три корені: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

При $a < 0$ є два корені: $x_1 = -\sqrt{1-a}$, $x_2 = \sqrt{1-a}$.

ж) При $a < 1$ коренів немає.

При $a = 1$ $x = 1$.

При $a > 1$ є два корені: $x_1 = 2-a$, $x_2 = a$.

3. а) При $a > \sqrt{2}$ або $a < \frac{\sqrt{2}}{2}$ коренів немає.

При $1 < a \leq \sqrt{2}$ два корені.

При $a = 1$ три корені.

При $\frac{\sqrt{2}}{2} < a < 1$ чотири корені.

При $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ два корені.

б) При $a < 0$ коренів немає.

При $a = 0$ один корінь.

При $0 < a < 1$ два корені.

При $a \geq 1$ один корінь.

в) При $a < 1$ коренів немає.

При $a = 1$ один корінь.

При $a > 1$ два корені.

д) При $a < -1$ або $a > \frac{1}{\sqrt{2}}$ коренів немає.

При $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ один корінь.

При $0 \leq a < \frac{1}{\sqrt{2}}$ два корені.

При $-1 \leq a < 0$ один розв'язок.

е) При $a \geq 1$ коренів немає.

При $-2 \leq a < 1$ один корінь.

При $a < -2$ два корені.

ж) При $a < 0$ один корінь.

При $a = 0$ два корені.

При $0 < a < 1,5$ три корені.

При $a = 1,5$ два корені.

При $a > 1,5$ один корінь.

4. а) При $a \geq 1$. б) При $a \geq 1$. в) При $a \geq 1$. г) При $a \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

д) При $a \geq 1$. е) Такого a не існує.

5. а) При $a > 1$. б) При $a > 4$. в) При $a > 1$.

г) При $a > 1$. д) При $a > -2$.

7. а) При $a \geq 1$ розв'язків немає.

При $0 \leq a < 1$ $x \in (a-2, -\sqrt{a}) \cup (\sqrt{a}, 2-a)$.

При $a < 0$ $x \in (a-2, 2-a)$.

б) При $a \geq 2$ $x \in [-3; 5]$.

При $0 < a < 2$ $x \in [-3; a^2 - 3] \cup [5 - a^2; 5]$.

При $a = 0$ $x = -3$ або $x = 5$.

При $a < 0$ розв'язків немає.

в) При $a \leq 0$ $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

При $0 < a < 1$ $x \in \left(-\frac{1}{a}; 0\right) \cup (0; +\infty)$.

При $a = 1$ $x \in \left(-\frac{1}{a}; 0\right) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

При $a > 1$ $x \in \left(-\frac{1}{a}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{a}\right) \cup (a; +\infty)$.

г) При $a > 2$ $x \in \mathbb{R}$.

При $a = 2$ $x \in (-1; 1)$.

При $1 < a < 2$ $x \in (-\log_2 a; \log_2 a)$.

При $a \leq 1$ $x \in \emptyset$.

Література

1. Ушаков Р. П. Макс і мінімум у задачах і вправах // Математика в школах України. — Х. : ВГ «Основа», 2005. — № 29–32.
2. Вишенський В. А., Перестюк М. О., Самойленко А. М. Збірник задач з математики. — К. : Твімс, 2000.
3. Ясінський В. В., Мазур К. І., Мазур О. К. Вибрані конкурсні задачі з математики. Арифметика. Алгебра. — К. : Фенікс, 2002.
4. Шарыгин И. Ф. Факультативный курс по математике. Решение задач. — М. : Просвещение, 1989.

Розділ II. ПЛАНІМЕТРІЯ

Тригонометричні тотожності в трикутнику

Якщо A, B, C — кути довільного трикутника, то $A > 0, B > 0, C > 0, A + B + C = \pi$. Звідси випливає, що для кутів A, B, C трикутника виконуються тотожності:

$$\sin(B+C) = \sin A, \quad \cos(B+C) = -\cos A,$$

$$\operatorname{tg}(B+C) = -\operatorname{tg} A, \quad \sin \frac{B+C}{2} = \cos \frac{A}{2},$$

$$\cos \frac{B+C}{2} = \sin \frac{A}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{B+C}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A}{2}.$$

Справді,

$$\sin(B+C) = \sin(\pi - A) = \sin A,$$

$$\cos \frac{B+C}{2} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \right) = \sin \frac{A}{2} \text{ тощо.}$$

Неважко довести й такі тотожності:

$$\sin(A+B-C) = \sin 2C, \quad \cos(A+B-C) = -\cos 2C,$$

$$\sin \frac{A+B-C}{2} = \cos C, \quad \cos \frac{A+B-C}{2} = \sin C,$$

$$\operatorname{tg} \frac{A+B-C}{2} = \operatorname{ctg} C, \quad \operatorname{ctg} \frac{A+B-C}{2} = \operatorname{tg} C \quad (C \neq 90^\circ),$$

$$\sin(nB+nC) = (-1)^{n+1} \sin nA, \quad \cos(nB+nC) = (-1)^n \cos nA,$$

$$\operatorname{tg}(nB+nC) = -\operatorname{tg} nA \quad (nA \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, n, k \in \mathbb{N}),$$

$$\operatorname{ctg}(nB+nC) = -\operatorname{ctg} nA \quad (nA \neq \pi k, n, k \in \mathbb{N}),$$

що пропонуємо зробити самостійно.

Завдання 1. Доведіть, що для кутів A, B, C довільного трикутника виконуються тотожності:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}, \quad (1)$$

$$\sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}, \quad (2)$$

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}, \quad (3)$$

$$\cos A + \cos B - \cos C = 4 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} - 1, \quad (4)$$

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C, \quad (5)$$

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C, \quad (6)$$

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C, \quad (7)$$

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C, \quad (8)$$

$$\operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{C}{2}, \quad (9)$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 1. \quad (10)$$

Доведення

$$\begin{aligned} 1) \sin A + \sin B + \sin C &= 2 \sin \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} = \\ &= 2 \cos \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} = 2 \cos \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} + \sin \frac{C}{2} \right) = \\ &= 2 \cos \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \right) = 4 \cos \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \sin A + \sin B - \sin C &= 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} - 2 \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} = \\ &= 2 \cos \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} \right) = 4 \cos \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \cos A + \cos B + \cos C &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{C}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} \right) + 1 = 4 \sin \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} + 1. \end{aligned}$$

$$4) \cos A + \cos B - \cos C = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} - \left(1 - 2 \sin^2 \frac{C}{2} \right) =$$

$$= 2 \sin \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \right) - 1 = 4 \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} - 1.$$

$$\begin{aligned} 5) \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C &= 2 \sin(A+B) \cdot \cos(A-B) + 2 \sin C \cdot \cos C = \\ &= 2 \sin C (\cos(A-B) - \cos(A+B)) = 4 \sin C \sin A \sin B. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6) \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C &= 2 \cos(A+B) \cdot \cos(A-B) + 2 \cos^2 C - 1 = \\ &= -1 + 2 \cos C (\cos C - \cos(A-B)) = \\ &= -1 - 2 \cos C (\cos(A+B) + \cos(A-B)) = -1 - 4 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7) \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C &= \frac{1}{2} (1 + \cos 2A + 1 + \cos 2B + 1 + \cos 2C) = \\ &= \frac{1}{2} (3 - 1 - 4 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C) = 1 - 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8) \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C &= 1 - \cos^2 A + 1 - \cos^2 B + 1 - \cos^2 C = \\ &= 3 - (1 - 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C) = 2 + 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C. \end{aligned}$$

9) Використовуючи формулу

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}$$

і рівність

$$\operatorname{ctg} \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} \right) = \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{1}{\operatorname{ctg} \frac{C}{2}},$$

дістанемо:

$$\frac{1}{\operatorname{ctg} \frac{C}{2}} = \frac{\operatorname{ctg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{B}{2} - 1}{\operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2}}; \quad \operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{C}{2};$$

$$10) \operatorname{tg} \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} \right) = \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{C}{2}}; \quad \frac{\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2}} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{C}{2}},$$

звідки випливає тотожність (10).

Тригонометричні тотожності для кутів A, B, C будь-якого трикутника називають тригонометричними тотожностями в трикутнику.

Тотожності для елементів довільного трикутника називають тотожностями в трикутнику або геометричними тотожностями. Прикладом геометричної тотожності є відома теорема косинусів, яка для сторін a, b, c і кута A трикутника записується так:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Будь-яку геометричну тотожність за допомогою теореми синусів можна звести до тригонометричної тотожності в трикутнику.

Тригонометричні тотожності в трикутнику доводяться за допомогою тригонометричних перетворень та формул зведення. Оскільки в трикутнику кути A, B, C рівноправні, то тригонометрична тотожність у трикутнику залишається справедливою, якщо зробити заміни

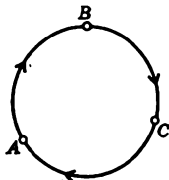
$$(A, B, C) \rightarrow (B, C, A) \rightarrow (C, A, B).$$

Таку властивість тригонометричних тотожностей у трикутнику називають циклічністю.

Враховуючи властивість циклічності, з тотожності (2) дістанемо такі тотожності:

$$\sin B + \sin C - \sin A = 4 \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2}, \quad (11)$$

$$\sin C + \sin A - \sin B = 4 \sin \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}. \quad (12)$$



Додаючи почленно тотожності (2), (11) і (12), дістанемо тотожність:

$$\begin{aligned} \sin A + \sin B + \sin C &= 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \\ &+ 4 \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} + 4 \sin \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Далі в тексті для зручності «тотожність» означатиме «тригонометричну тотожність у трикутнику».

Завдання 2 (для самостійного розв'язування). Виховуючи властивість циклічності, з тотожності (4) отримайте ще три тотожності.

Завдання 3 (для самостійного розв'язування). Доведіть тотожність

$$\sin 2A + \sin 2B - \sin 2C = 4 \sin C \cos A \cos B$$

та отримайте з неї ще три тотожності, враховуючи властивість циклічності.

Завдання 4. Доведіть тотожність

$$\sin A + \cos B + \cos C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{C}{2} \right).$$

Доведення

$$\begin{aligned} 4 \sin \frac{A}{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{C}{2} \right) &= 2 \sin \frac{A}{2} \left(\cos \frac{B-C}{2} - \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{B+C}{2} \right) \right) = \\ &= 2 \sin \frac{A}{2} \left(\cos \frac{B-C}{2} + \sin \frac{B+C}{2} \right) = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} + 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = \\ &= 2 \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} + \sin A = \cos B + \cos C + \sin A. \end{aligned}$$

Завдання 5 (для самостійного розв'язування). Отримайте з тотожності задачі 4 ще три тотожності, враховуючи властивість циклічності.

Задача 6 (для самостійного розв'язування). Доведіть тотожність

$$\sin A + \cos B - \cos C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{C}{2} \right)$$

та отримайте з неї ще три тотожності, враховуючи властивість циклічності.

Завдання 7 (для самостійного розв'язування). Доведіть тотожності:

$$\begin{aligned} \text{а) } \sin(A+B-C) + \sin(B+C-A) + \sin(C+A-B) &= \\ &= 4 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \cos(A+B-C) + \cos(B+C-A) + \cos(C+A-B) &= \\ &= 1 + 4 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C; \end{aligned}$$

$$\text{в) } \sin A + \sin B + \cos \frac{C}{2} = 4 \cos \frac{C}{2} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{A-B}{4} \right) \cos \left(\frac{\pi}{6} - \frac{A-B}{4} \right);$$

$$\text{г) } \cos A + \cos B + \sin \frac{C}{2} = 4 \sin \frac{C}{2} \cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{A-B}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{6} - \frac{A-B}{2} \right);$$

$$\text{д) } \frac{\sin A + \sin B - 2 \cos \frac{C}{2}}{\cos A + \cos B - 2 \sin \frac{C}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{C}{2};$$

$$\text{е) } \frac{\sin A + \sin B + 2\cos \frac{A-B}{2}}{\sin A + \sin B - 2\cos \frac{A-B}{2}} = -\operatorname{ctg}^2 \frac{C}{4}$$

та отримайте з них ще по три тотожності, використовуючи властивість циклічності.

Завдання 8. Якщо в трикутнику ABC виконується рівність

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1,$$

то цей трикутник прямокутний. Доведіть.

Доведення. За тотожністю (6) маємо:

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4\cos A \cos B \cos C.$$

Отже, для поданого трикутника $4\cos A \cos B \cos C = 0$, тому один із кутів A, B, C прямий.

Завдання 9. Якщо в трикутнику ABC виконується рівність

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1,$$

то цей трикутник прямокутний. Доведіть.

Доведення. За тотожністю (7) маємо:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A \cos B \cos C.$$

Отже, для поданого трикутника $\cos A \cos B \cos C = 0$, тому один із кутів A, B, C прямий.

Завдання 10. Доведіть тотожність

$$(\sin A + \sin B + \sin C)(\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C) = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c)}{2abc}.$$

Доведення. За теоремою синусів маємо:

$$a = 2R \sin A, \quad b = 2R \sin B, \quad c = 2R \sin C.$$

Це дає змогу записати тотожність у вигляді

$$\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{2 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C}.$$

$$\text{Зауважимо, що } \operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B = \frac{\sin(A+B)}{\sin A \cdot \sin B} = \frac{\sin C}{\sin A \cdot \sin B};$$

$$\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C = \frac{\sin A}{\sin B \cdot \sin C}, \quad \operatorname{ctg} C + \operatorname{ctg} A = \frac{\sin B}{\sin C \cdot \sin A}.$$

Отже,

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C &= \frac{1}{2}((\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B) + (\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C) + (\operatorname{ctg} C + \operatorname{ctg} A)) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin C}{\sin A \cdot \sin B} + \frac{\sin A}{\sin B \cdot \sin C} + \frac{\sin B}{\sin C \cdot \sin A} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C}.\end{aligned}$$

Завдання 11. Доведіть тотожність

$$a \cos(B-C) + b \cos(C-A) + c \cos(A-B) = 2a \cos A + 2b \cos B + 2c \cos C.$$

Доведення. Враховуючи, що

$$a = 2R \sin A, \quad b = 2R \sin B, \quad c = 2R \sin C,$$

подамо тотожність у вигляді:

$$\begin{aligned}2 \sin A \cdot \cos(B-C) + 2 \sin B \cdot \cos(C-A) + 2 \sin C \cdot \cos(A-B) &= \\ &= 2 \sin 2A + 2 \sin 2B + 2 \sin 2C.\end{aligned}$$

Зауважимо, що

$$\begin{aligned}2 \sin A \cdot \cos(B-C) + 2 \sin B \cdot \cos(C-A) + 2 \sin C \cdot \cos(A-B) &= \\ &= 2 \sin(B+C) \cdot \cos(B-C) + 2 \sin(C+A) \cdot \cos(C-A) + \\ &+ 2 \sin(A+B) \cdot \cos(A-B) = \sin 2B + \sin 2C + \sin 2C + \sin 2A + \\ &+ \sin 2A + \sin 2B = 2 \sin 2A + 2 \sin 2B + 2 \sin 2C.\end{aligned}$$

Завдання 12. Доведіть тотожність

$$a^3 \cos(B-C) + b^3 \cos(C-A) + c^3 \cos(A-B) = 3abc.$$

Доведення. Використовуючи теорему синусів, запишемо подану тотожність:

$$\begin{aligned}\sin^3 A \cdot \cos(B-C) + \sin^3 B \cdot \cos(C-A) + \sin^3 C \cdot \cos(A-B) &= \\ &= 3 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C.\end{aligned}\tag{14}$$

Використовуючи тотожності

$$\begin{aligned}\cos(B-C) &= \frac{\sin 2B + \sin 2C}{2 \sin A}, \quad \cos(C-A) = \frac{\sin 2C + \sin 2A}{2 \sin B}, \\ \cos(A-B) &= \frac{\sin 2A + \sin 2B}{2 \sin C},\end{aligned}$$

запишемо тотожність (14) у вигляді:

$$\frac{1}{2} \sin^3 A (\sin 2B + \sin 2C) + \frac{1}{2} \sin^3 B (\sin 2C + \sin 2A) +$$

$$+\frac{1}{2}\sin^2 C(\sin 2A + \sin 2B) = 3\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C.$$

Позначивши ліву частину останньої тотожності через M , маємо:

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{4}(1 - \cos 2A)(\sin 2B + \sin 2C) + \frac{1}{4}(1 - \cos 2B)(\sin 2C + \sin 2A) + \\ &+ \frac{1}{4}(1 - \cos 2C)(\sin 2A + \sin 2B) = \frac{1}{4}(2\sin 2A + 2\sin 2B + 2\sin 2C - \\ &- (\sin 2B \cdot \cos 2A + \cos 2B \cdot \sin 2A) - (\sin 2C \cdot \cos 2B + \cos 2C \cdot \sin 2B) - \\ &- (\sin 2A \cdot \cos 2C + \cos 2A \cdot \sin 2C)) = \frac{1}{4}(2\sin 2A + 2\sin 2B + 2\sin 2C - \\ &- \sin(2B + 2A) - \sin(2C + 2B) + \sin(2A + 2C)) = \\ &= \frac{1}{4}(2\sin 2A + 2\sin 2B + 2\sin 2C + \sin 2C + \sin 2A + \sin 2B) = \\ &= \frac{3}{4}(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) = \frac{3}{4} \cdot 4\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C = 3\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C. \end{aligned}$$

Завдання 13. Якщо для трикутника ABC виконується рівність $a + b = (\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B) \operatorname{tg} \frac{C}{2}$, то цей трикутник рівнобедрений. Доведіть.

Доведення. Маємо

$$\sin A + \sin B = (\sin A \operatorname{tg} A + \sin B \operatorname{tg} B) \operatorname{tg} \frac{C}{2}$$

або

$$\begin{aligned} \sin A \left(1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} \frac{C}{2}\right) + \sin B \left(1 - \operatorname{tg} B \operatorname{tg} \frac{C}{2}\right) &= 0, \\ \sin A \cdot \frac{\cos\left(A + \frac{C}{2}\right)}{\cos A \cdot \cos \frac{C}{2}} + \sin B \cdot \frac{\cos\left(B + \frac{C}{2}\right)}{\cos B \cdot \cos \frac{C}{2}} &= 0, \\ \frac{\sin A \cdot \cos\left(A + \frac{C}{2}\right)}{\cos A} + \sin B \cdot \frac{\cos\left(B + \frac{C}{2}\right)}{\cos B} &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Зауважимо, що

$$\cos\left(A + \frac{C}{2}\right) = \cos \frac{2A+C}{2} = \cos \frac{\pi - B + A}{2} = \sin \frac{B-A}{2},$$

$$\cos\left(B + \frac{C}{2}\right) = \cos \frac{2B+C}{2} = \cos \frac{\pi - A + B}{2} = \sin \frac{A-B}{2} = -\sin \frac{B-A}{2}.$$

Із тотожності (15) маємо:

$$\frac{\sin A \cdot \sin \frac{B-A}{2}}{\cos A} - \frac{\sin B \cdot \sin \frac{B-A}{2}}{\cos B} = 0, \quad \sin \frac{B-A}{2} \left(\frac{\sin A}{\cos A} - \frac{\sin B}{\cos B} \right) = 0.$$

Якщо $\sin \frac{B-A}{2} = 0$, то оскільки A і B — кути трикутника,

$$\angle A = \angle B.$$

Якщо $\frac{\sin A}{\cos A} - \frac{\sin B}{\cos B} = 0$, то $\sin(A-B) = 0$, $\angle A = \angle B$.

Отже, трикутник ABC — рівнобедрений.

Завдання 14 (для самостійного розв'язування). Доведіть тотожності:

а) $a = b \cos C + c \cos B$;

б) $2p = (a+b) \cos C + (b+c) \cos A + (c+a) \cos B$;

в) $r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$;

г) $R = \frac{p}{\sin A + \sin B + \sin C}$;

д) $r = p \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}$;

е) $\frac{4R+r}{p} = \operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2}$;

ж) $S = p^2 \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}$;

з) $a^2 + b^2 + c^2 = 2ab \cos C + 2bc \cos A + 2ca \cos B$;

и) $a^3 \sin(B-C) + b^3(C-A) + c^3 \sin(A-B) = 0$;

к) $(p-a)^2 \sin^2 \frac{A}{2} + (p-b)^2 \sin^2 \frac{B}{2} + (p-c)^2 \sin^2 \frac{C}{2} =$

$$= 2r(4R+r) \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2},$$

де r — радіус вписаного кола, R — радіус описаного навколо трикутника ABC кола, S — площа трикутника ABC .

Уважний читач, мабуть, помітив, що під час доведення тригонометричних тотожностей у трикутнику ми не використовували умови $A > 0$, $B > 0$, $C > 0$. Єдиною умовою була рівність $A + B + C = \pi$.

Означення. Тригонометрична тотожність для кутів A, B, C називається π -тотожністю, якщо вона справедлива для довільних дійсних чисел A, B, C із сумою π .

Усі тригонометричні тотожності, які ми розглядали раніше, є π -тотожностями.

Нехай маємо π -тотожність. Виконаємо підстановки

$$(A, B, C) \rightarrow (A_1, B_1, C_1)$$

за умови $A_1 + B_1 + C_1 = \pi$. (Тут A_1, B_1, C_1 , — деякі вирази, що містять A, B, C . Очевидно, ми знову одержимо π -тотожність, яка є водночас і тотожністю в трикутнику. Це дає змогу з тригонометричної тотожності в трикутнику одержати безліч тотожностей у трикутнику.

У тотожності (1) виконаємо підстановки:

$$(A, B, C) \rightarrow (\pi(n+1) - nA, -nB, -nC).$$

Зауважимо, що $\pi(n+1) - nA + (-nB) + (-nC) = \pi$. Маємо:

$$\begin{aligned} \sin(\pi(n+1) - nA) - \sin nB - \sin nC &= 4 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi n - nA}{2}\right) \cdot \cos \frac{nB}{2} \cdot \cos \frac{nC}{2}, \\ \sin(\pi n - nA) - \sin nB - \sin nC &= -4 \sin \frac{\pi n - nA}{2} \cdot \cos \frac{nB}{2} \cdot \cos \frac{nC}{2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Із тотожності (16) дістаємо:

при $n = 2$

$$-\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \cdot \cos B \cdot \cos C,$$

при $n = 3$

$$\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = -4 \cos \frac{3A}{2} \cdot \cos \frac{3B}{2} \cdot \cos \frac{3C}{2}, \quad (17)$$

при $n = 4$

$$-\sin 4A + \sin 4B + \sin 4C = -4 \sin 2A \cdot \cos 2B \cdot \cos 2C \text{ тощо.}$$

Завдання 15. Доведіть тотожність

$$\sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C = 3 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} + \cos \frac{3A}{2} \cdot \cos \frac{3B}{2} \cdot \cos \frac{3C}{2}.$$

Доведення. За тотожностями (1) і (17) маємо:

$$\begin{aligned} & 3 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} + \cos \frac{3A}{2} \cdot \cos \frac{3B}{2} \cdot \cos \frac{3C}{2} = \\ &= \frac{3}{4} (\sin A + \sin B + \sin C) - \frac{1}{4} (\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C) = \\ &= \frac{1}{4} (3 \sin A - \sin 3A) + \frac{1}{4} (3 \sin B - \sin 3B) + \frac{1}{4} (3 \sin C - \sin 3C) = \\ &= \sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C. \end{aligned}$$

Ми використали тотожність $\frac{1}{4} (3 \sin \alpha - \sin 3\alpha) = \sin^3 \alpha$.

Завдання 16. Доведіть тотожність

$$\begin{aligned} & \sin(2k+1)A + \sin(2k+1)B + \sin(2k+1)C = \\ &= (-1)^k \cdot 4 \cos \frac{(2k+1)A}{2} \cdot \cos \frac{(2k+1)B}{2} \cdot \cos \frac{(2k+1)C}{2}. \end{aligned}$$

Доведення. Покладемо в тотожності (16) $n = 2k+1$. Маємо:

$$\begin{aligned} & \sin(\pi(2k+1) - (2k+1)A) + \sin(2k+1)B + (2k+1)C = \\ &= 4 \sin\left(\frac{\pi(2k+1) - (2k+1)A}{2}\right) \cdot \cos \frac{(2k+1)B}{2} \cdot \cos \frac{(2k+1)C}{2}. \quad (18) \end{aligned}$$

Враховуючи, що

$$\sin(\pi(2k+1) - (2k+1)A) = \sin(2k+1)A$$

та

$$\sin\left(\frac{\pi(2k+1) - (2k+1)A}{2}\right) = \cos\left(\pi k - \frac{(2k+1)A}{2}\right) = (-1)^k \cos \frac{(2k+1)A}{2},$$

дістанемо із тотожності (18) потрібну тотожність.

Завдання 17. Доведіть тотожність

$$\sin 2nA + \sin 2nB + \sin 2nC = (-1)^{n+1} 4 \sin nA \cdot \sin nB \cdot \sin nC.$$

Доведення. Виконаємо в тотожності (5) підстановки:

$$(A, B, C) \rightarrow (nA, nB, nC - \pi(n-1)).$$

Зауважимо, що $nA + nB + nC - \pi(n-1) = \pi$. Маємо:

$$\begin{aligned} \sin 2nA + \sin 2nB + \sin 2(nC - \pi(n-1)) &= \\ = 4 \sin nA \cdot \sin nB \cdot \sin(nC - \pi(n-1)). \end{aligned} \quad (19)$$

Оскільки

$$\sin 2(nC - \pi(n-1)) = \sin 2nC,$$

$$\sin(nC - \pi(n-1)) = \sin(\pi n - nC) = (-1)^{n-1} \sin nC,$$

то з тотожності (19) дістанемо потрібну тотожність.

Завдання 18 (для самостійного розв'язування). Доведіть тотожності:

$$a) \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} = 4 \cos \frac{\pi-A}{4} \cdot \cos \frac{\pi-B}{4} \cdot \cos \frac{\pi-C}{4};$$

$$б) \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} = 4 \sin \frac{\pi-A}{4} \cdot \sin \frac{\pi-B}{4} \cdot \sin \frac{\pi-C}{4};$$

$$\begin{aligned} в) \cos(2n+1)A + \cos(2n+1)B + \cos(2n+1)C &= \\ = 1 + (-1)^n \cdot 4 \sin \frac{(2n+1)A}{2} \cdot \sin \frac{(2n+1)B}{2} \cdot \sin \frac{(2n+1)C}{2}; \end{aligned}$$

$$г) \cos 2nA + \cos 2nB + \cos 2nC = -1 + (-1)^n 4 \cos nA \cdot \cos nB \cdot \cos nC;$$

$$\begin{aligned} д) \operatorname{ctg} nA \cdot \operatorname{ctg} nB + \operatorname{ctg} nB \cdot \operatorname{ctg} nC + \operatorname{ctg} nC \cdot \operatorname{ctg} nA &= 1 \\ (nA \neq \pi k, nB \neq \pi k, nC \neq \pi k, n \in N, k \in N); \end{aligned}$$

$$е) \operatorname{tg} nA + \operatorname{tg} nB + \operatorname{tg} nC = \operatorname{tg} nA \cdot \operatorname{tg} nB \cdot \operatorname{tg} nC$$

$$(nA \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, nB \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, nC \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, n \in N, k \in N).$$

Література

1. Вишенский В. А., Карташов Н. В., Михайловский В. И., Ядренко М. И. Сборник задач Киевских математических олимпиад. — К.: Вища школа, 1984.
2. Вишенський В. А., Ганюшкін О. В. Українські математичні олімпіади. — К.: Вища школа, 1993.
3. Фурсенко В. Б. Лексикографическое изложение конструктивных задач геометрии треугольника // Математика в школе. — 1937. — № 5.
4. Гайштут О. Г., Ушаков Р. П. Тригонометрія. — К.: Магістр-8, 1997.

Одна цікава геометрична тотожність

Нехай D — довільна точка, взята на стороні BC трикутника ABC (рис. 1). Покладемо $\angle ADC = \alpha$, тоді $\angle ADB = 180^\circ - \alpha$. З $\triangle ADC$ за теоремою косинусів маємо:

$$\cos \alpha = \frac{AD^2 + CD^2 - AC^2}{2AD \cdot CD}. \quad (1)$$

Із трикутника ADB за теоремою косинусів маємо:

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha = \frac{AD^2 + BD^2 - AB^2}{2AD \cdot BD},$$

звідки

$$\cos \alpha = \frac{AB^2 - AD^2 - BD^2}{2AD \cdot BD}. \quad (2)$$

Прирівнявши праві частини рівностей (1) і (2), дістанемо:

$$\frac{AD^2 + CD^2 - AC^2}{2AD \cdot CD} = \frac{AB^2 - AD^2 - BD^2}{2AD \cdot BD},$$

або

$$\frac{AD^2 + CD^2 - AC^2}{CD} = \frac{AB^2 - AD^2 - BD^2}{BD}. \quad (3)$$

Одержана тотожність (3) дає можливість ефективно розв'язувати задачі на знаходження відстаней.

Розглянемо характерні приклади.

Задача 1. Виведіть формулу медіани трикутника.

* Нехай AD — медіана трикутника ABC (рис. 1).

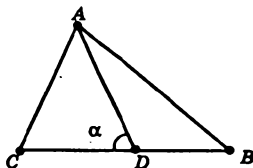


Рис. 1

Зазвичай, позначають $BC = a$, $CA = b$, $AD = m_a$, $AB = c$. Зрозуміло, що $CD = BD = \frac{a}{2}$. Із тотожності (3) дістанемо:

$$\frac{m_a^2 + \frac{a^2}{4} - b^2}{\frac{a}{2}} = \frac{c^2 - m_a^2 - \frac{a^2}{4}}{\frac{a}{2}},$$

звідки $2m_a^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}$ або $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$.

Задача 2. AD — бісектриса трикутника ABC (рис. 1). Доведіть, що $AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD$.

* Нехай AD — бісектриса трикутника ABC (рис. 1). Із тотожності (3) маємо:

$$AD^2(BD+CD) = AB^2 \cdot CD + AC^2 \cdot BD - BD^2 \cdot CD - CD^2 \cdot BD$$

або

$$AD^2 = \frac{AB^2 \cdot CD}{BD+CD} + \frac{AC^2 \cdot BD}{BD+CD} - BD \cdot CD. \quad (4)$$

Згідно з властивістю бісектриси внутрішнього кута трикутника, $BD:CD = AB:AC$. Отже,

$$\begin{aligned} \frac{AB^2 \cdot CD}{BD+CD} + \frac{AC^2 \cdot BD}{BD+CD} &= \frac{AB^2}{\frac{BD}{CD} + 1} + \frac{AC^2}{1 + \frac{CD}{BD}} = \\ &= \frac{AB^2}{\frac{AB}{AC} + 1} + \frac{AC^2}{1 + \frac{AC}{AB}} = \frac{AB^2 \cdot AC}{AB+AC} + \frac{AC^2 \cdot AB}{AB+AC} = AB \cdot AC. \end{aligned}$$

Тепер із рівності (4) одержуємо: $AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD$, що й потрібно було довести.

Задача 3. Коло, вписане в трикутник ABC , дотикається до сторони BC у точці D . Знайдіть AD .

* Нехай D, E, F відповідно — точки дотику вписаного в трикутник ABC кола до сторін BC, CA та AB (рис. 2).

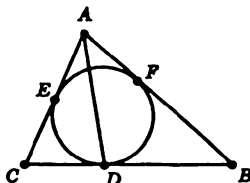


Рис. 2

Покладемо $CD = x$, $BD = y$, $AF = z$. Зрозуміло, що $CE = CD = x$, $BD = BF = y$, $AE = AF = z$. Для знаходження величин x , y , z складемо систему

$$\begin{cases} x + y = a, \\ x + z = b, \\ y + z = c, \end{cases}$$

$$\text{звідки } x = \frac{a+b-c}{2} = p-c, \quad y = \frac{a+c-b}{2} = p-b, \quad z = \frac{c+b-a}{2} = p-a.$$

Таким чином,

$$CD = p-c, \quad BD = p-b.$$

Згідно з тотожністю (3), маємо:

$$\frac{AD^2 + (p-c)^2 - b^2}{p-c} = \frac{c^2 - AD^2 - (p-b)^2}{p-b},$$

$$AD^2(p-b+p-c) = c^2(p-c) + b^2(p-b) - (p-b)(p-c)^2 - (p-c)(p-b)^2,$$

$$AD^2 \cdot a = c^2(p-c) + b^2(p-b) - (p-b)(p-c)(p-c+p-b),$$

$$AD^2 \cdot a = c^2(p-c) + b^2(p-b) - (p-b)(p-c) \cdot a.$$

Остаточно дістанемо:

$$AD = \sqrt{b^2 \cdot \frac{p-b}{a} + c^2 \cdot \frac{p-c}{a} - (p-b)(p-c)}.$$

Задача 4. Доведіть теорему Стюарта¹:

$$AD^2 \cdot BC + BC \cdot DC \cdot DB = CD \cdot AB^2 + BD \cdot AC^2 \quad (\text{рис. 1}).$$

* Із тотожності (3) маємо:

$$AD^2(BD+CD) + CD^2 \cdot BD + BD^2 \cdot CD = CD \cdot AB^2 + BD \cdot AC^2,$$

або

$$AD^2 \cdot BC + CD \cdot BD \cdot BC = CD \cdot AB^2 + BD \cdot AC^2,$$

що й потрібно було довести.

Задача 5. На гіпотенузі AB прямокутного трикутника ABC взято точку D так, що $CD = 4$, $AD = 1$, $BD = 5$. Знайдіть катети трикутника.

* Нехай $CA = x$, $CB = y$ (рис. 3). Згідно з тотожністю (3), маємо:

¹ Стюарт М. (1717–1785) — шотландський математик.

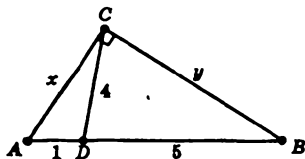


Рис. 3

$$\frac{1^2 + 4^2 - x^2}{1} = \frac{y^2 - 4^2 - 5^2}{5}, \text{ або } 5x^2 + y^2 = 126.$$

Враховуючи теорему Піфагора, маємо систему

$$\begin{cases} 5x^2 + y^2 = 126, \\ x^2 + y^2 = 36. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, враховуючи, що $x > 0$, $y > 0$, маємо відповідь:

$$CA = \frac{3\sqrt{10}}{2}, \quad CB = \frac{3\sqrt{6}}{2}.$$

Задача 6. Основи трапеції дорівнюють a і b , бічні сторони c і d , діагоналі — e і f . Доведіть, що $e^2 + f^2 = c^2 + d^2 + 2ab$.

* На рис. 4 показано трапецію $ABCD$. За умовою $DC = a$, $AB = b$, $AD = c$, $BC = d$, $DB = e$, $AC = f$.

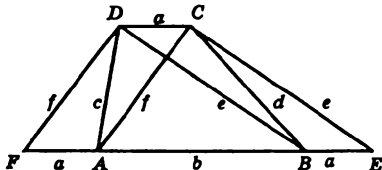


Рис. 4

На прямій AB візьмемо точки E та F такі, що $BE = CD = FA = a$. Чотирикутники $BECD$ та $FACD$ — паралелограми, отже,

$$DF = CA = f, \quad CE = DB = e.$$

Із трикутника CAE , згідно з тотожністю (3), маємо:

$$\frac{d^2 + b^2 - f^2}{b} = \frac{e^2 - a^2 - d^2}{a},$$

звідки

$$ab^2 + a^2b + ad^2 + bd^2 = af^2 + be^2, \text{ або } (a+b)(ab+d^2) = af^2 + be^2. \quad (5)$$

Із трикутника DFB , згідно з тотожністю (3), маємо:

$$\frac{c^2 + a^2 - f^2}{a} = \frac{e^2 - c^2 - b^2}{b},$$

звідки

$$a^2b + ab^2 + bc^2 + ac^2 = ae^2 + bf^2, \text{ або } (a+b)(ab+c^2) = ae^2 + bf^2. \quad (6)$$

Додаючи рівності (5) і (6), дістанемо:

$$(a+b)(c^2 + d^2 + 2ab) = (a+b)(e^2 + f^2),$$

звідки $c^2 + d^2 + 2ab = e^2 + f^2$, що й потрібно було довести.

Задача 7. На відрізку AB як на діаметрі побудовано коло. Точка C лежить на цьому відрізку, причому $AC = 2r_1$, $BC = 2r_2$. На відрізках AC і BC як на діаметрах побудовані кола. Знайдіть радіус четвертого кола, яке дотикається до першого кола внутрішньо, а до кожного з двох інших кіл — зовнішньо.

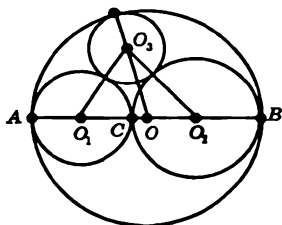
* Нехай O — центр кола з діаметром AB (рис. 5);

Рис. 5

O_1 та O_2 — центри кіл відповідно з діаметрами AC та BC . O_3 — центр кола з шуканим радіусом x . Згідно з умовою,

$$OA = OB = r_1 + r_2 = O_1O_2.$$

Далі знаходимо:

$$O_1O_3 = r_1 + x, \quad O_2O_3 = r_2 + x, \quad OO_3 = r_1 + r_2 - x, \quad OO_1 = r_2, \quad OO_2 = r_1.$$

Із трикутника $O_1O_2O_3$ за допомогою тотожності (3) маємо:

$$\frac{OO_2^2 + OO_1^2 - O_1O_2^2}{OO_1} = \frac{O_2O_2^2 - OO_2^2 - OO_2^2}{OO_2},$$

або

$$\frac{(r_1 + r_2 - x)^2 + r_2^2 - (r_1 + x)^2}{r_2} = \frac{(r_2 + x)^2 - r_1^2 - (r_1 + r_2 - x)^2}{r_1},$$

$$\frac{r_2^2 + (2r_1 + r_2)(r_2 - 2x)}{r_2} = \frac{(r_1 + 2r_2)(2x - r_1) - r_1^2}{r_1},$$

$$r_1 \cdot r_2^2 + r_1 \cdot r_2(2r_1 + r_2) - 2xr_1(2r_1 + r_2) =$$

$$= 2xr_2(r_1 + 2r_2) - r_1 \cdot r_2(r_1 + 2r_2) - r_2r_1^2, \quad 4r_1r_2(r_1 + r_2) = 4x(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2),$$

$$\text{звідки } x = \frac{r_1r_2(r_1 + r_2)}{r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2}.$$

Задача 8. Два кола з радіусами R і r ($R > r$) дотикаються внутрішньо. Знайдіть радіус третього кола, яке дотикається до перших двох і прямої, на якій лежать їх центри.

* На рис. 6 зображені кола з центрами O і O_1 , що дотикаються внутрішньо в точці A .

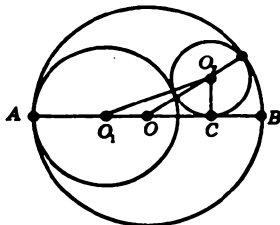


Рис. 6

На прямій AB лежать діаметри цих кіл. Трете коло з центром O_2 дотикається до двох поданих кіл і прямої AB у точці C .

$O_2C = x$ — шуканий радіус. Зазначимо, що

$$OO_2 = R - x, \quad O_1O_2 = r + x, \quad OO_1 = R - r,$$

$$OC^2 = OO_2^2 - O_2C^2 = (R - x)^2 - x^2 = R^2 = 2Rx.$$

Із трикутника O_1O_2C , згідно з тотожністю (8), маємо:

$$\frac{OO_1^2 + OO_2^2 - O_1O_2^2}{OO_1} = \frac{O_2C^2 - OO_2^2 - OC^2}{OC},$$

або

$$\frac{(R-r)^2 + (R-x)^2 - (r+x)^2}{R-r} = \frac{x^2 - (R-x)^2 - (R^2 - 2Rx)}{\sqrt{R^2 - 2Rx}},$$

$$\frac{R(R-r) - (R+r)x}{R-r} = -\sqrt{R^2 - 2Rx}, \quad \sqrt{R^2 - 2Rx} = \frac{R+r}{R-r}x - R,$$

$$R^2 - 2Rx = \left(\frac{R+r}{R-r}\right)^2 x^2 - 2xR \frac{R+r}{R-r} + R^2, \quad \left(\frac{R+r}{R-r}\right)^2 x^2 = x \cdot \frac{4Rr}{R-r},$$

звідки, враховуючи, що $x > 0$, маємо відповідь: $x = \frac{4Rr(R-r)}{(R+r)^2}$.

Вправи

1. Коло називається зовнівписаним у трикутник, якщо воно дотикається до його сторони та продовжень двох інших сторін (таких кіл три). Відомо, що зовнівписане коло дотикається до сторони BC у точці D . Знайдіть AD .

Відповідь. $\sqrt{b^2 \cdot \frac{p-c}{a} + c^2 \cdot \frac{p-b}{a} - (p-b)(p-c)}$.

2. Виведіть формулу бісектриси трикутника.

Відповідь. $l_a = \frac{2}{b+c} \sqrt{bc p(p-a)}$.

3. Катети прямокутного трикутника дорівнюють a і b . Доведіть, що $l_c = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$.

4. D — довільна точка, взята на стороні BC трикутника ABC . Відомо, що $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $BD = n$, $DC = m$. Доведіть, що:

а) $AD < \sqrt{\frac{m}{a}c^2 + \frac{n}{a}b^2}$; б) $a < \frac{c^2}{n} + \frac{b^2}{m}$.

5. Доведіть, що для прямокутного трикутника справедлива нерівність $l_c \leq \frac{a+b}{2\sqrt{2}}$, де a , b та l_c — відповідно катети та бісектриса трикутника.

6. Основи трапеції дорівнюють c і d , а бічні сторони a і b . Знайдіть відрізок, що сполучає середини основ трапеції.

Відповідь. $\frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - (c-d)^2}$.

7. У трикутнику ABC $AB > AC$. На стороні AB відкладаємо відрізок $AD = AC$. Знайдіть DC .

Відповідь. $2\sqrt{\frac{b}{c}(p-b)(p-c)}$.

8. У рівнобедреному трикутнику $ABCSA = CB = a$. На стороні AB взято точку D так, що $AD = b$, $BC = c$. Знайдіть CD .

Відповідь. $\sqrt{a^2 - bc}$.

9. Доведіть, що квадрат діагоналі рівнобедреної трапеції дорівнює квадрату бічної сторони плюс добуток основ трапеції.

10. Основи трапеції дорівнюють a та b ($a < b$), а бічні сторони — c і d . Знайдіть діагоналі трапеції.

Відповідь. $\sqrt{\frac{b(c^2 - a^2) + a(b^2 - d^2)}{b - a}}$; $\sqrt{\frac{b(d^2 - a^2) + a(b^2 - c^2)}{b - a}}$.

11. Основи трапеції a і b , бічні сторони — c і d , а діагоналі — e і f . Доведіть, що $(e + f)^2 \leq (c + d)^2 + 4ab$.

Вказівка. Врахувати, що для будь-якого опуклого чотирикутника виконується нерівність $ef \leq ab + cd$.

12. Два кола з радіусами r_1 та r_2 дотикаються ззовні. На лінії їх центрів як на діаметрі побудовано третє коло. Знайдіть радіус кола, що дотикається до кожного з перших двох кіл ззовні, а до третього кола внутрішньо.

Відповідь. $\frac{r_1 r_2}{2(r_1 + r_2)}$.

13. Доведіть, що в будь-якому трикутнику виконується нерівність: а) $9R^2 \geq a^2 + b^2 + c^2$; б) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq 2\frac{1}{4}$.

Вказівка. Використайте результат задачі 9.

14. Доведіть, що в будь-якому трикутнику виконується нерівність: а) $R \geq 2r$; б) $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$.

Вказівка. Використайте результат задачі 10.

15. Знайдіть відстань між центроїдом і центром кола, вписаного в трикутник.

Відповідь. $\frac{1}{3}\sqrt{9r^2 - 3p^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2)}$.

Про одну задачу з математичного фольклору

У статті [1] В. Мазорчук запропонував серед інших таку задачу.

Задача 1. Нехай задано рівнобедрений трикутник ABC , у якому $AB = BC$ та $\angle ABC = 20^\circ$. На стороні AB цього трикутника вибрано точку M так, що $AC = MB$. Знайдіть величину кута MCA (рис. 1).

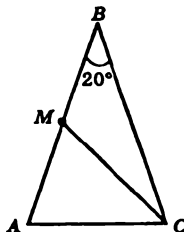


Рис. 1

Далі будемо рівнобедрений трикутник із кутом 20° при вершині називати A -трикутником — на честь Аль-Беруні¹, в одній з праць якого зустрічається цей трикутник. У кінці статті [1] наведено красиве суто геометричне розв'язання задачі 1. Покажемо декілька розв'язань за допомогою тригонометрії.

Нехай

$$AB = BC = 1, \angle MCA = x^\circ, \text{ тоді } MB = AC = 2\sin 10^\circ, \\ AM = 1 - 2\sin 10^\circ, \angle MCB = 80^\circ - x, \angle BMC = 80^\circ + x, \angle AMC = 100^\circ - x.$$

Із трикутника MCB за теоремою косинусів маємо:

$$\begin{aligned} CM^2 &= BC^2 + BM^2 - 2BC \cdot BM \cos \angle MBC; \\ CM^2 &= 1 + 4\sin^2 10^\circ - 4\sin 10^\circ \cdot \cos 20^\circ = \\ &= 1 + 4\sin 10^\circ (\sin 10^\circ - \cos 20^\circ) = 1 + 4\sin 10^\circ (\sin 10^\circ - \sin 70^\circ) = \\ &= 1 - 4\sin 10^\circ \cdot 2\cos 40^\circ \cdot \sin 30^\circ = \\ &= 1 - 4\sin 10^\circ \cdot \cos 40^\circ = 1 - 2(\sin 50^\circ - \sin 30^\circ) = \\ &= 2 - 2\sin 50^\circ = 2(1 - \cos 40^\circ) = 4\sin^2 20^\circ, \end{aligned}$$

звідки $CM = 2\sin 20^\circ$.

Із трикутника MCB за теоремою синусів маємо:

¹ Аль-Беруні (973–1048) — видатний перський ісламський учений.

$$\frac{MB}{\sin(80^\circ-x)} = \frac{MC}{\sin 20^\circ}, \text{ або } \frac{2\sin 10^\circ}{\sin(80^\circ-x)} = \frac{2\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ}; \sin(80^\circ-x) = \sin 10^\circ.$$

Враховуючи, що $0^\circ < x < 80^\circ$, з останнього рівняння дістаємо $x = 70^\circ$.

Можна розв'язати задачу 1 і не знаходячи MC . Із трикутника MCB за теоремою синусів маємо:

$$\frac{MB}{\sin(80^\circ-x)} = \frac{BC}{\sin(80^\circ+x)}, \text{ або } \frac{2\sin 10^\circ}{\sin(80^\circ-x)} = \frac{1}{\sin(80^\circ+x)};$$

$$2\sin 10^\circ \cdot \sin(80^\circ+x) = \sin(80^\circ-x),$$

$$\cos(70^\circ+x) - \cos(90^\circ+x) = \sin(80^\circ-x).$$

За формулами зведення маємо:

$$\cos(70^\circ+x) + \sin x = \cos(10^\circ+x), \quad \cos(10^\circ+x) - \cos(70^\circ+x) = \sin x,$$

$$2\sin(40^\circ+x) \cdot \sin 30^\circ = \sin x, \quad \sin(40^\circ+x) = \sin x,$$

$$\sin(40^\circ+x) - \sin x = 0, \quad 2\cos(20^\circ+x) \cdot \sin 20^\circ = 0, \quad \cos(20^\circ+x) = 0.$$

Оскільки $0^\circ < x < 80^\circ$, то з останнього рівняння випливає, що $x = 70^\circ$.

Задачу 1 можна розв'язувати багатьма способами, застосовуючи теореми синусів і косинусів до трикутників MCB та MCA .

Наведемо пару таких доведень.

1. Із трикутника MCA за теоремою косинусів маємо:

$$AM^2 = AC^2 + MC^2 - 2AC \cdot MC \cdot \cos x,$$

або

$$(1 - 2\sin 10^\circ)^2 = 4\sin^2 10^\circ + 4\sin^2 20^\circ - 8\sin 10^\circ \cdot \sin 20^\circ \cdot \cos x,$$

звідки

$$\cos x = \frac{4\sin^2 20^\circ + 4\sin^2 10^\circ - 1}{8\sin 10^\circ \cdot \sin 20^\circ}. \quad (1)$$

Спростимо вираз:

$$A = \frac{4\sin^2 20^\circ + 4\sin^2 10^\circ - 1}{8\sin 10^\circ \cdot \sin 20^\circ},$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{2(1 - \cos 40^\circ) + 4\sin 10^\circ - 1}{8\sin 10^\circ \cdot \sin 20^\circ} = \frac{1 - 2\cos 40^\circ + 4\sin 10^\circ}{8\sin 10^\circ \cdot \sin 20^\circ} = \\ &= \frac{1 + 2\sin 10^\circ - 2(\cos 40^\circ - 2\sin 10^\circ)}{8\sin 10^\circ \cdot \sin 20^\circ} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2(\sin 30^\circ + \sin 10^\circ) - 2(\sin 50^\circ - \sin 10^\circ)}{8 \sin 10^\circ \cdot \sin 20^\circ} = \\
 &= \frac{4 \sin 20^\circ \cdot \cos 10^\circ - 4 \cos 30^\circ \cdot \sin 20^\circ}{8 \sin 10^\circ \cdot \sin 20^\circ} = \\
 &= \frac{\cos 10^\circ - \cos 30^\circ}{2 \sin 10^\circ} = \frac{2 \sin 20^\circ \cdot \sin 10^\circ}{2 \sin 10^\circ} = \sin 20^\circ.
 \end{aligned}$$

Рівняння (1) набуває вигляду $\cos x = \sin 20^\circ = \cos 70^\circ$, звідки $x = 70^\circ$ (не забудьмо, що $0^\circ < x < 80^\circ$).

2. Із трикутника MCA за теоремою синусів одержимо:

$$\frac{AM}{\sin x} = \frac{CM}{\sin 80^\circ} \text{ або } \frac{1 - 2 \sin 10^\circ}{\sin x} = \frac{2 \sin 20^\circ}{\sin 80^\circ},$$

звідки

$$\sin x = \frac{(1 - 2 \sin 10^\circ) \sin 80^\circ}{2 \sin 20^\circ}. \quad (2)$$

Помітимо, що

$$\begin{aligned}
 \frac{(1 - 2 \sin 10^\circ) \sin 80^\circ}{2 \sin 20^\circ} &= \frac{2(\sin 30^\circ - \sin 10^\circ) \cos 10^\circ}{4 \sin 10^\circ \cdot \cos 10^\circ} = \\
 &= \frac{\sin 30^\circ - \sin 10^\circ}{2 \sin 10^\circ} = \frac{2 \cos 20^\circ \cdot \sin 10^\circ}{2 \sin 10^\circ} = \cos 20^\circ.
 \end{aligned}$$

Рівняння (2) набуває вигляду $\sin x = \cos 20^\circ$, звідки $x = 70^\circ$.

Задача 2. Покладемо в A -трикутнику (рис. 1) $AB = BC = a$, $AC = b$. Доведіть, що $2b < a < 3b$.

Геометричне розв'язання

а) Розглянемо рис. 1: $\angle AMC = 30^\circ$, отже, $AM > b$, бо в трикутнику MAC проти більшого кута лежить більша сторона. Отже,

$$a = BM + MA = b + MA > b + b = 2b.$$

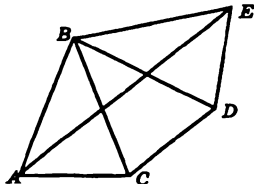


Рис. 2

б) Розташуємо Δ -трикутники так, як подано на рис. 2. Помітимо, що $\angle ABE = 3 \cdot 20^\circ = 60^\circ$ і $BA = BE$, отже, трикутник ABE рівносторонній і $AE = a$. З іншого боку, $AE < AC + CD + DE$ або $a < 3b$, що й треба було довести.

Алгебраїчне доведення

а) Нерівність $2b < a$ рівносильна нерівності

$$4\sin 10^\circ < 1, \text{ або } 2\sin 10^\circ < \frac{1}{2}; 2\sin 10^\circ < \sin 30^\circ. \quad (3)$$

Враховуючи тотожність $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$, маємо:

$$\sin 30^\circ = 3\sin 10^\circ - 4\sin^3 10^\circ.$$

Нерівність (3) набуває вигляду

$$2\sin 10^\circ < 3\sin 10^\circ - 4\sin^3 10^\circ, \text{ або } 4\sin^3 10^\circ < 1,$$

звідки $\sin^3 10^\circ < \sin^3 30^\circ$, що очевидно.

б) Нерівність $a < 3b$ рівносильна нерівності

$$\frac{1}{6} < \sin 10^\circ, \text{ або } \frac{1}{2} < 3\sin 10^\circ; \sin 30^\circ < 3\sin 10^\circ, \\ 3\sin 10^\circ - 4\sin^3 10^\circ < 3\sin 10^\circ, -4\sin^3 10^\circ < 0,$$

що очевидно.

На завершення наведемо декілька вправ.

1. Нехай основа Δ -трикутника дорівнює b , а бічна сторона a . Доведіть тотожність

$$a^3 + b^3 = 3a^2b.$$

2. Нехай R_1 та r_1 — радіуси описаного та вписаного кіл трикутника BMC , а R_2 та r_2 — радіуси описаного та вписаного кіл трикутника AMC . Доведіть, що:

а) $R_1 > R_2$; б) $r_1 < r_2$.

3. На стороні AB Δ -трикутника взято точку M так, що $\angle MCA = 60^\circ$, а на стороні CB — точку N так, що $\angle NCA = 50^\circ$. Доведіть, що $\angle NMC = 30^\circ$.

Література

1. Мазорчук В. Декілька задач з математичного фольклору // У світі математики. 3. — № 4. — С. 6.

Розділ III. СТЕРЕОМЕТРІЯ

Про один цікавий метод знаходження відстані між двома мимобіжними прямими

Відомо, що задача про побудову спільного перпендикуляра до двох мимобіжних прямих та знаходження його довжини викликає труднощі в учнів. Для розв'язування цієї задачі потрібна добре розвинена просторова уява, яка може з'явитися лише в результаті регулярних тренувань у розв'язуванні задач такого типу.

Відомий московський педагог-математик І. Ф. Шаритін запропонував цікавий метод знаходження відстані між двома мимобіжними прямими. Ми покажемо, як за допомогою цього методу можна також будувати спільний перпендикуляр до двох мимобіжних прямих.

Метод ґрунтується на такій теоремі:

Відстань між мимобіжними прямими дорівнює відстані від точки, що є проекцією однієї із заданих прямих на площину, перпендикулярну до неї, до проекції другої прямої на цю ж саму площину.

Доведення. Нехай a і b — дві мимобіжні прямі (рис. 1); γ — площина, перпендикулярна до прямої a ; $K = a \cap \gamma$, b' — проекція прямої b на площину γ ($b' = \text{Пр}_{\gamma} b$); α — площина, що містить прямі b і b' .

Очевидно, $\alpha \perp \gamma$; отже, $\alpha \parallel a$.

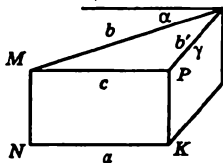


Рис. 1

Далі, KP — перпендикуляр, проведений із точки K до площини α . Довжина відрізка KP дорівнює відстані між мимобіжними прямими a і b . Далі проведемо через точку P пряму c , паралельну до пря-

мої a . Пряма c перетинає пряму b у точці M . Проведемо відрізок MN , паралельний відрізку KP ($N \in a$). Відрізок MN — спільний перпендикуляр до мимобіжних прямих a і b .

Складемо алгоритм знаходження відстані між двома мимобіжними прямими a і b та побудови їх спільного перпендикуляра.

1-й крок. Будуємо площину γ , перпендикулярну до прямої a , і знаходимо точку K перетину прямої a з площиною γ .

2-й крок. Будуємо проекцію b' прямої b на площину γ . Прямі b і b' визначають площину α , паралельну прямій a .

3-й крок. Проводимо з точки K перпендикуляр KP до прямої b' . Довжина відрізка KP дорівнює відстані між прямими a і b .

4-й крок. Проводимо через точку P пряму c , паралельну прямій a , і знаходимо точку M перетину прямих c і b .

5-й крок. Проводимо з точки M перпендикуляр MN до прямої a ($MN \parallel KP$) (рис. 1). Відрізок MN — спільний перпендикуляр до прямих a і b .

Покажемо цей метод у дії на прикладах розв'язування кількох характерних задач.

Задача 1. Знайдіть відстань між мимобіжними діагоналями двох суміжних граней куба з ребром 1. Побудуйте спільний перпендикуляр до цих діагоналей.

Розв'язання. На рис. 2 зображено куб $ABCD_1A_1B_1C_1D_1$ із ребром одиничної довжини. Треба знайти відстань між прямими $B_1C(a)$ і $A_1B(b)$ та побудувати до них спільний перпендикуляр.

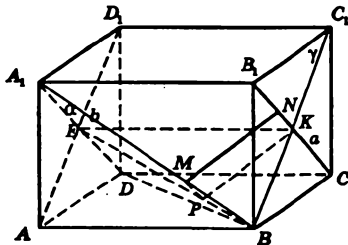


Рис. 2

1-й крок. Будуємо площину ABC_1D_1 (γ), перпендикулярну до прямої B_1C , і знаходимо точку K ($a \cap \gamma = K$); K — це точка перетину прямих B_1C та C_1B .

2-й крок. Будуємо проекцію прямої A_1B на площину γ . Очевидно, $\text{Пр}_\gamma A_1 = E$, $\text{Пр}_\gamma B = B$ і $\text{Пр}_\gamma A_1B = EB(b')$. α — площина A_1BD , що містить прямі A_1B і EB . $\alpha \parallel a$.

3-й крок. Проводимо з точки K перпендикуляр KP до прямої EB . Довжина відрізка KP — це відстань між прямими A_1B і B_1C . Помітимо, що відрізок KP — це висота прямокутного трикутника EKB . Тому

$$KP = \frac{EK \cdot KB}{BE} = \frac{EK \cdot KB}{\sqrt{EK^2 + KB^2}} = \frac{1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

4-й крок. Проводимо через точку P пряму s , паралельну прямій B_1C , і знаходимо точку M перетину прямих s і b .

5-й крок. Проводимо з точки M перпендикуляр MN до прямої B_1C ; MN — спільний перпендикуляр прямих B_1C і A_1B . Зазначимо, що в прямокутному трикутнику EKB

$$BP:EP = KB^2:KE^2 = 1:2.$$

Оскільки $PM \parallel EA_1$, то $BM:MA_1 = BP:PE = 1:2$.

Далі помітимо, що $NK = MP = \frac{1}{3}A_1E = \frac{1}{3}CK$.

Отже, $CN = CK + KN = \frac{4}{3}CK$,

$$B_1N = B_1K - NK = CK - \frac{1}{3}CK = \frac{2}{3}CK, \quad CN:B_1N = 2:1.$$

Відповідь. $\frac{1}{\sqrt{3}}$; $CN:NB_1 = 2:1$, $BM:MA_1 = 1:2$.

Задача 2. $SABC$ — правильна трикутна піраміда, всі ребра якої мають довжину 1. Знайдіть відстань між бічним ребром SA та медіаною CD трикутника ABC . Побудуйте спільний перпендикуляр до прямих SA і CD .

Розв'язання. На рис. 3 зображено правильну трикутну піраміду $SABC$, кожне ребро якої має довжину 1; CD — медіана основи. Знайдемо відстань між прямими SA і CD та побудуємо їх спільний перпендикуляр.

1-й крок. Проводимо площину γ через вершину S перпендикулярно до медіани CD . Знаходимо точку $K = CD \cap \gamma$; K — центр правильного трикутника ABC .

$$EP:PS = KE^2:KS^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 : \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = 3:8.$$

Оскільки $PM \parallel EA$, то $AM:MS = EP:PS = 3:8$;

$$MP:AE = 8:11 = NK:DK,$$

отже, $DN:NK = 3:8$; $DN:NC = 1:10$, бо $CK = 2DK$.

Відповідь. $\sqrt{\frac{2}{11}}$; $AM:MS = 3:8$, $DN:NC = 1:10$.

Задача 3. Усі ребра правильної трикутної призми мають довжину 1. Побудуйте спільний перпендикуляр до двох мимобіжних діагоналей бічних граней та знайдіть його довжину.

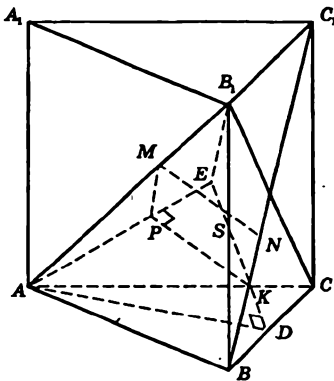


Рис. 4

Розв'язання. На рис. 4 зображено призму $ABCA_1B_1C_1$. Треба побудувати спільний перпендикуляр до прямих AB_1 і BC_1 та знайти його довжину. Нехай D та S відповідно середини ребер BC і BB_1 .

1-й крок. Будуємо площину ADS (γ), перпендикулярну до прямої BC_1 , і знаходимо точку K ($K = \gamma \cap BC_1$).

2-й крок. Проектуємо пряму AB_1 на площину γ . $\text{Пр}_\gamma B_1 = E$ ($B_1E \parallel C_1B$, $E \in DS$); $\text{Пр}_\gamma AB_1 = AE$.

3-й крок. Проводимо перпендикуляр KP із точки K на пряму AE . KP — відстань між прямими AB_1 і BC_1 . Оскільки

$$\angle KPE = \angle EDA = 90^\circ,$$

то трикутники KPE і ADE подібні, звідки

$$\frac{KP}{AD} = \frac{KE}{AE}. \quad (1)$$

Враховуючи, що

$$AD = \frac{\sqrt{3}}{2}, KE = \frac{1}{\sqrt{2}}, AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{15}{8}},$$

із пропорції (1) дістанемо: $\frac{KP}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{15}{8}}}$, звідки $KP = \frac{\sqrt{1}}{5} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

4-й крок. Через точку P проводимо пряму c , паралельну до прямої BC_1 ; і знаходимо точку M ($M = c \cap AB_1$).

5-й крок. Із точки M проводимо перпендикуляр MN на пряму BC_1 ; MN — спільний перпендикуляр прямих BC_1 і AB_1 . Визначимо положення точок M і N :

$$PE = \sqrt{EK^2 - PK^2} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{3}{10}},$$

$$\frac{AM}{MB_1} = \frac{AP}{PE} = \frac{AE - PE}{PE} = \frac{AE}{PE} - 1 = \frac{\sqrt{\frac{15}{8}}}{\sqrt{\frac{3}{10}}} - 1 = \frac{5}{2} - 1 = 3:2.$$

$$\text{Отже, } MP = \frac{3}{5} B_1 E = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{10\sqrt{2}} = NK.$$

Далі маємо:

$$\frac{BN}{NC_1} = \frac{BK + NK}{KC_1 - NK} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{10\sqrt{2}}}{\frac{3}{2\sqrt{2}} - \frac{3}{10\sqrt{2}}} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Відповідь. } \frac{\sqrt{5}}{5}; AM:MB_1 = 3:2; BN:NC_1 = 2:3.$$

Наш досвід свідчить про те, що викладений метод добре засвоюють учні.

Наведемо кілька задач для самостійного розв'язування.

1. Основою піраміди є прямокутник $ABCD$, причому $AB = a$, $BC = b$. Бічне ребро SD перпендикулярне до площини основи і має довжину c . Знайдіть відстань між прямими AD і SB , побудуйте спільний перпендикуляр до цих прямих.

Відповідь. $\frac{ac}{\sqrt{a^2 + c^2}}$; $AN:ND = a^2:c^2$; $SM:MB = c^2:a^2$.

2. Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ має довжину 1; точка L — середина ребра CD . Побудуйте спільний перпендикуляр до прямих BD і LD_1 та знайдіть довжину цього перпендикуляра.

Відповідь. $\frac{1}{3}$; $LM:MD_1 = 1:8$; $BN:ND = 7:2$.

3. Кожне ребро правильної трикутної призми $ABCA_1 B_1 C_1$ має довжину 1. AD — медіана трикутника ABC . Знайдіть відстань між прямими AD і $A_1 C$ та побудуйте спільний перпендикуляр цих прямих.

Відповідь. $\frac{\sqrt{5}}{5}$; $AN:ND = 4:1$; $CM:MA_1 = 1:4$.

4. Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ із ребром довжиною 1; точка E — середина ребра BB_1 . Знайдіть відстань між прямими $A_1 B$ і CE та побудуйте спільний перпендикуляр до цих прямих.

Відповідь. $\frac{1}{3}$; $CM:ME = 8:1$; $A_1 N:NB = 7:2$.

5. Кожне ребро правильної трикутної піраміди $SABC$ має довжину 1; AA_1 та BB_1 — медіани граней SAB і ABC відповідно. Знайдіть відстань між прямими AA_1 і BB_1 та побудуйте спільний перпендикуляр до цих прямих.

Відповідь. $\frac{1}{\sqrt{10}}$; $AM:MA_1 = 3:2$; $BN:NB_1 = 3:2$.

Література

Шарыгин И. Ф. Об одном методе нахождения расстояния и угла между скрещивающимися прямыми // Математика в школе. — 1986. — № 6.

Призматойд та його об'єм

Відомо, що об'єми геометричних тіл можна обчислювати за допомогою інтеграла. Важливу роль тут відіграє теорема 1 (див. [2]). Нехай тіло міститься між паралельними опорними площинами α і β (рис. 1); γ — площина, що лежить між ними, паралельна до них і віддалена від площини α на відстань x . Нехай переріз тіла площиною γ має площу $S(x)$ і $S(x)$ — неперервна функція. Тоді об'єм V тіла знаходиться за формулою

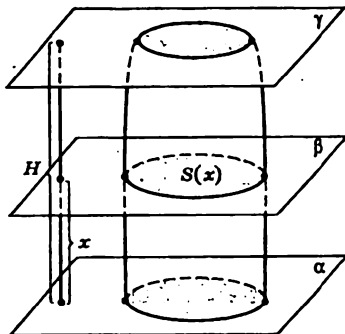


Рис. 1

$$V = \int_0^H S(x) dx, \quad (1)$$

де H — відстань між площинами α і β .

1. Теорема Симпсона¹

Нехай основи тіла лежать у паралельних опорних площинах. Переріз, проведений паралельно опорним площинам на відстані x від однієї з них, має площу, яка виражається многочленом від x не вище третього степеня. Тоді об'єм цього тіла можна знайти за формулою

$$V = \frac{1}{6} H (S_1 + 4S_c + S_2), \quad (2)$$

¹ Симпсон Томас (1710–1761) — англійський математик.

де H — відстань між опорними площинами (висота тіла), S_1 і S_2 — площі основ заданого тіла, S_c — площа середнього перерізу, тобто перерізу, який поділяє висоту тіла навпіл і паралельний до опорних площин.

Доведення. За умовою $S(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, де коефіцієнти a , b , c , d — деякі сталі, пов'язані з поданим тілом. Деякі з цих сталих можуть дорівнювати нулю. Згідно з формулою (1),

$$\begin{aligned} V &= \int_0^H (ax^3 + bx^2 + cx + d) dx = \left(a \frac{x^4}{4} + b \frac{x^3}{3} + c \frac{x^2}{2} + dx \right) \Big|_0^H = \\ &= \frac{1}{12} H (3aH^3 + 4bH^2 + 6cH + 12d). \end{aligned}$$

Тепер знайдемо об'єм тіла за формулою (2). Для цього помітимо, що

$$S_1 = S(0) = d, \quad S_c = S\left(\frac{H}{2}\right) = \frac{aH^3}{8} + \frac{bH^2}{4} + \frac{cH}{2} + d,$$

$$S_2 = S(H) = aH^3 + bH^2 + cH + d.$$

Із формули (2) дістаємо:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{6} H \left(d + \frac{aH^3}{2} + bH^2 + 2cH + 4d + aH^3 + bH^2 + cH + d \right) = \\ &= \frac{1}{6} H \left(\frac{3}{2} aH^3 + 2bH^2 + 3cH + 6d \right) = \frac{1}{12} H (3aH^3 + 4bH^2 + 6cH + 12d). \end{aligned}$$

Ми бачимо, що результати збігаються. Теорему доведено.

Означення. Тіло називається симпсоновим, якщо воно задовольняє дві вимоги:

- 1) основи тіла лежать у двох паралельних опорних площинах;
- 2) переріз, проведений паралельно опорним площинам на відстані x від одної з них, має площу, яка виражається многочленом від x не вище другого степеня.

Зрозуміло, що теорема Симпсона виконується для будь-якого симпсонового тіла, бо многочлен не вище другого степеня є одночасно й многочленом, не вищим від третього степеня. Можна показати, що призма, піраміда, зрізана піраміда, циліндр, конус, зрізаний конус, куля та кульовий сегмент є симпсоновими тілами. Тому формула (2) є зручним джерелом для виведення формул об'єму геометричних тіл.

2. Об'єм призматоїда

Означення. Опуклий многогранник, усі вершини якого розташовані у двох паралельних площинах, називається призматомом.

Зокрема, призма, піраміда, зрізана піраміда є призматоїдами. Із означення випливає, що бічні грані призматоїда є або трикутниками, або трапеціями, або паралелограмами. Грані, що лежать у паралельних опорних площинах, називаються основами, а відстань між ними — висотою призматоїда.

У книгах [1], [3], [4] наведено геометричне доведення того, що об'єм призматоїда задовольняє рівність (2). Ми покажемо, що теорема Симпсона може бути застосована до призматоїда, і таким чином отримаємо інші виведення формули для об'єму цього тіла.

Теорема. Призматом є симпсоновим тілом.

Доведення. Розглянемо рис. 2. Основи призматоїда лежать у паралельних опорних площинах α і β . Площина γ паралельна до опорних площин і віддалена від площини α на відстань x . У перерізі призматоїда площиною γ утворився опуклий многокутник $MNPQ...R$. Проведемо з точки M усі діагоналі цього многокутника. При цьому він розіб'ється на декілька трикутників. Доведемо, що площа кожного з цих трикутників є многочленом не вище другого степеня. Введемо в кожній із площин α , β , γ прямокутну систему координат. Помітимо, що

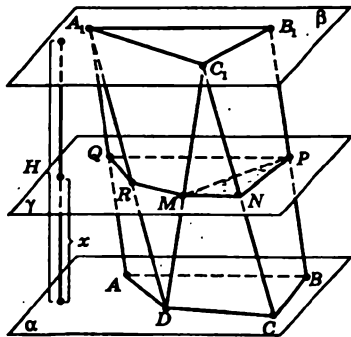


Рис. 2

$$\frac{MD}{C_1D} = \frac{NC}{C_1C} = \dots = \frac{RD}{A_1D} = \frac{x}{H} = \lambda,$$

де $0 < \lambda < 1$, H — висота призматоїда.

Спроектуємо ортогонально точки C_1 та D на площину γ . Одержимо точки C'_1 та D' відповідно. При цьому не зміняться координати цих точок, тобто $x_{C_1} = x_{C'_1}$, $y_{C_1} = y_{C'_1}$, $x_D = x_{D'}$, $y_D = y_{D'}$. Крім того, зрозуміло, що

$$D'M : C'_1D' = DM : C_1D = \lambda.$$

Згідно з формулою ділення відрізка в поданому відношенні

$$x_M = \lambda x_{C_1} + (1 - \lambda)x_D = x_D + \lambda(x_{C_1} - x_D), \quad y_M = y_D + \lambda(y_{C_1} - y_D);$$

$$x_N = x_C + \lambda(x_{C_1} - x_C), \quad y_N = y_C + \lambda(y_{C_1} - y_C); \quad x_P = x_B + \lambda(x_{B_1} - x_B),$$

$$y_P = y_B + \lambda(y_{B_1} - y_B). \quad \overline{MN} = (x_N - x_M; y_N - y_M),$$

$$MN^2 = (x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2; \quad \overline{MP} = (x_P - x_M; y_P - y_M),$$

$$MP^2 = (x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2;$$

$$\overline{MN} \cdot \overline{MP} = (x_N - x_M)(x_P - x_M) + (y_N - y_M)(y_P - y_M).$$

Площу S трикутника MNP знайдемо за відомою формулою

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{MN^2 \cdot MP^2 - (\overline{MN} \cdot \overline{MP})^2}.$$

Помітимо, що

$$\begin{aligned} MN^2 \cdot MP^2 - (\overline{MN} \cdot \overline{MP})^2 &= \\ &= ((x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2)((x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2) - \\ &\quad - ((x_N - x_M)(x_P - x_M) + (y_N - y_M)(y_P - y_M))^2 = \\ &= ((x_N - x_M)(y_P - y_M) - (y_N - y_M)(x_P - x_M))^2. \end{aligned}$$

Отже,

$$S = \frac{1}{2} |(x_N - x_M)(y_P - y_M) - (y_N - y_M)(x_P - x_M)|.$$

Для читачів, обізнаних із аналітичною геометрією, зазначимо, що ми одержали відому формулу

$$S = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} x_N - x_M & y_N - y_M \\ x_P - x_M & y_P - y_M \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} x_M & y_M & 1 \\ x_N & y_N & 1 \\ x_P & y_P & 1 \end{pmatrix} \right|.$$

Тут через $\det$ позначено визначник відповідної матриці. Далі помітимо, що

$$x_N - x_M = \lambda p_1 + p_2, \quad y_P - y_M = \lambda m_1 + m_2,$$

$$y_N - y_M = \lambda k_1 + k_2, \quad x_P - x_M = \lambda t_1 + t_2,$$

де $p_1, p_2, m_1, m_2, t_1, t_2, k_1, k_2$ — деякі сталі, пов'язані з координатами вершин призматоїда. Так, наприклад,

$$p_1 = x_D - x_C, \quad m_1 = y_B - y_A + y_D - y_C \text{ тощо.}$$

Тоді

$$\begin{aligned} (x_N - x_M)(y_P - y_M) - (y_N - y_M)(x_P - x_M) = \\ = (\lambda p_1 + p_2)(\lambda m_1 + m_2) - (\lambda t_1 + t_2)(\lambda k_1 + k_2) = a\lambda^2 + b\lambda + c, \end{aligned}$$

де a, b, c — деякі сталі, пов'язані з координатами вершин призматоїда. Наприклад, $a = m_1 p_1 - k_1 t_1$ тощо. Таким чином,

$$S = \frac{1}{2} |a\lambda^2 + b\lambda + c| = \frac{1}{2} \left| a \frac{x^2}{H^2} + b \frac{x}{H} + c \right|.$$

Оскільки $S > 0$ при будь-якому $x \in (0; H)$, то функція

$$y = a \frac{x^2}{H^2} + b \frac{x}{H} + c$$

зберігає знак на всьому інтервалі $(0; H)$. Отже,

$$S = \frac{1}{2} \left(a \frac{x^2}{H^2} + b \frac{x}{H} + c \right) \text{ або } S = -\frac{1}{2} \left(a \frac{x^2}{H^2} + b \frac{x}{H} + c \right).$$

В обох випадках S — це многочлен не вище другого степеня. Зрозуміло, що площі трикутників MPQ, MQR і т. д., на які розбито многокутник $MNPQ \dots R$, також є многочленами не вище другого степеня. Сума скінченного числа таких многочленів також є многочленом не вище другого степеня. Отже, $S(x) = Ax^2 + Bx + C$, де A, B, C — сталі (деякі з них, але не всі одночасно, можуть дорівнювати нулю), пов'язані з координатами вершин призматоїда. Теорему доведено, і об'єм призматоїда можна обчислювати за формулою (2).

Розглянемо приклади.

1) $AB \parallel CD$ — ребра тетраедра $DABC$ (рис. 3). Нехай $AB = a$, $DC = b$, H — відстань між мимобіжними прямими AB і DC . Прямі AB і DC утворюють кут φ . Фігура $MNPQ$ — середній переріз тетраедра. Легко бачити, що $MNPQ$ — паралелограм. Тому

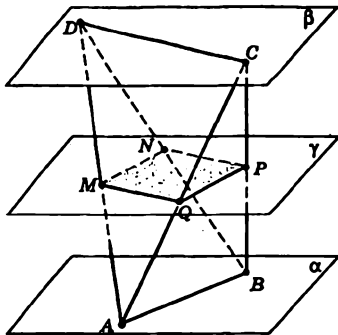


Рис. 3

$$S_c = MN \cdot MQ \cdot \sin \varphi = \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \sin \varphi = \frac{1}{4} ab \cdot \sin \varphi.$$

Із формули (2) дістанемо:

$$V = \frac{1}{6} H(0 + 4S_c + 0) = \frac{H}{6} ab \cdot \sin \varphi.$$

2) На рис. 4 зображено клин. Однією основою клина є трапеція $ABCD$, а другою — відрізок MN , паралельний площині трапеції та її основам. Клин можна розглядати як тіло, обмежене трикутною призматичною поверхнею і двома довільними січними площинами. Тому його іноді називають зрізаною призмою. Нехай $AB = a$, $DC = b$, $MN = c$, висота клина H , висота трапеції $ABCD$ дорівнює h ; PQR — переріз клина площиною, перпендикулярною до ребра MN ; $EFGK$ — трапеція, що є середнім перерізом клина; $QR = h$,

$$PO = H, S_c = \frac{1}{2}(EF + KG) \cdot LT = \frac{1}{2} \left(\frac{a+c}{2} + \frac{b+c}{2} \right) \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{8} h(a+b+2c);$$

$$S_1 = 0, S_2 = S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot RQ = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h.$$

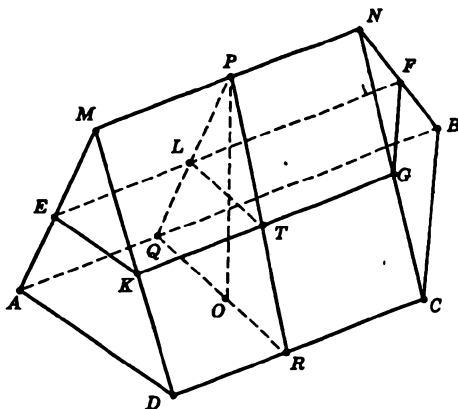


Рис. 4

Згідно з формулою (2), маємо:

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{6}H \left(0 + 4 \cdot \frac{1}{8}h(a+b+2c) + \frac{1}{2}(a+b)h \right) = \\
 &= \frac{1}{12}Hh(2a+2b+2c) = \frac{Hh}{2} \cdot \frac{a+b+c}{3}.
 \end{aligned}$$

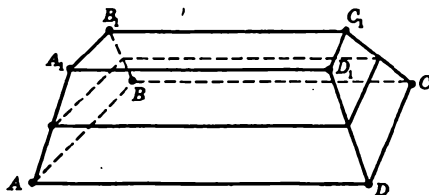


Рис. 5

Позначимо через S_1 площу трикутника PQR ;

$$S_1 = \frac{H \cdot h}{2} \quad ; \quad V = S_1 \cdot \frac{a+b+c}{3}.$$

Таким чином, об'єм клина дорівнює добутку площі перпендикулярного перерізу на середнє арифметичне його паралельних ребер.

3) Знайдемо об'єм зрізаного клина (рис. 5). Ця фігура має основами прямокутники $ABCD$ та $A_1B_1C_1D_1$ із відповідно паралельними сторонами: $AD \parallel A_1D_1$, $AB \parallel A_1B_1$. Нехай H — висота зрізаного клина, а $AD = a$, $AB = b$, $A_1D_1 = a_1$, $A_1B_1 = b_1$. Очевидно, середній переріз є також прямокутником зі сторонами

$$\frac{a+a_1}{2} \text{ та } \frac{b+b_1}{2}.$$

Із формули (2) дістанемо:

$$V = \frac{1}{6}H \left(a_1b_1 + 4 \cdot \frac{a+a_1}{2} \cdot \frac{b+b_1}{2} + ab \right) = \frac{1}{6}H(2ab + 2a_1b_1 + ab_1 + a_1b).$$

Зауваження. Теорему про призматойд можна доводити інакше.

Візьмемо довільну вершину призматойда A , та розіб'ємо діагоналями на трикутники кожную грань, яка її не містить. Легко бачити, що призматойд можна розрізати на трикутні піраміди з вершиною A , основами яких є ці трикутники. Утворені піраміди є призматойдами з тими ж основами, що й початковий призматойд, бо під час розрізання не додаються нові вершини. Для завершення доведення лишається перевірити твердження теореми для найпростішого призматойда — трикутної піраміди.

Література

1. Адамар Ж. Элементарная геометрия. Ч. II. — М., 1958.
2. Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. Геометрия 10–11. М. : Просвещение, 1998.
3. Бескин Л. Н. Стереометрия. — М. : Просвещение, 1971.
4. Ушаков Р. П. Повторювальний курс математики. — К. : Техніка, 1999.

Координатний метод розв'язування задач на тіла обертання

Розглянемо ситуацію, коли плоский багатокутник лежить у правій півплощині координатної площини xOy , а віссю обертання є вісь Oy . На рисунках зображено осові перерізи тіл обертання.

1. Площі поверхонь тіл обертання

Теорема 1. Площу S поверхні, утвореної від обертання відрізка AB навколо осі Oy , що не перетинає його, можна знайти за формулою

$$S = 2\pi \frac{x_A + x_B}{2} \cdot AB. \quad (1)$$

Доведення. Можливі такі випадки.

1) Відрізок AB під час обертання утворює бічну поверхню циліндра (рис. 1а). $S = 2\pi RH$, де R і H відповідно радіус основи і висота циліндра. У цьому випадку $x_A = x_B = R$, $AB = H$, отже,

$$S = 2\pi \frac{x_A + x_B}{2} \cdot AB.$$

2) Відрізок AB під час обертання утворює бічну поверхню конуса (рис. 1б). $S = \pi Rl$, де R — радіус основи конуса, l — його твірна. У цьому випадку $x_A = 0$, $x_B = R$, $AB = l$, отже,

$$S = \pi x_B \cdot AB = 2\pi \frac{x_A + x_B}{2} \cdot AB.$$

3) Відрізок AB під час обертання утворює бічну поверхню зрізаного конуса (рис. 1в); $S = \pi(R+r)l$, де R і r — радіуси основ, l — твірна зрізаного конуса. У цьому випадку $x_A = r$, $x_B = R$, $AB = l$, отже,

$$S = \pi(x_B + x_A) \cdot AB = 2\pi \frac{x_A + x_B}{2} \cdot AB.$$

4) Відрізок AB під час обертання утворює кільце або круг (рис. 1г); $S = \pi(R-r)^2$, де R і r — це відповідно зовнішній і внутрішній радіуси кільця. У цьому випадку $x_A = r$, $x_B = R$, $AB = R - r = x_B - x_A$;

$$S = \pi(x_B^2 - x_A^2) = \pi(x_B - x_A)(x_B + x_A) =$$

$$= \pi \cdot AB(x_B + x_A) = 2\pi \frac{x_A + x_B}{2} \cdot AB.$$

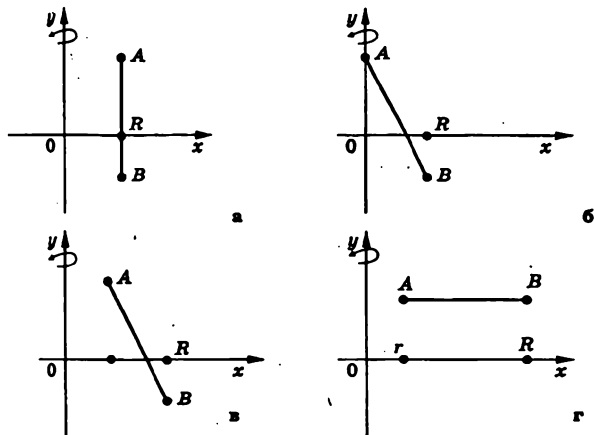


Рис. 1

Якщо $x_A = 0$, то під час обертання утворюється круг,

$$x_B = AB = R, \quad S = \pi R^2 = \pi x_B^2 = \pi x_B \cdot x_B = 2\pi \frac{x_B + x_A}{2} \cdot AB.$$

Теорему доведено.

Якщо обертається n -кутник, то

$$S = S_1 + S_2 + \dots + S_n, \quad (2)$$

де S — площа поверхні тіла обертання, $S_1, S_2, \dots, S_n$ — площі поверхонь тіл, утворених обертанням його сторін.

Розглянемо окремі часткові випадки.

1) Обертається паралелограм $ABCD$ (рис. 2). Згідно з теоремою 1 і формулою (2),

$$\begin{aligned} S = & 2\pi \frac{x_A + x_B}{2} \cdot AB + 2\pi \frac{x_B + x_C}{2} \cdot BC + \\ & + 2\pi \frac{x_C + x_D}{2} \cdot CD + 2\pi \frac{x_D + x_A}{2} \cdot DA. \end{aligned}$$

Враховуючи, що $AB = CD$, $BC = DA$, $x_A + x_C = x_B + x_D = 2x_O$ (O — центр паралелограма), маємо:

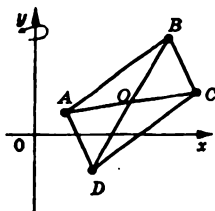


Рис. 2

$$\begin{aligned}
 S &= 2\pi \cdot AB \cdot \frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{2} + 2\pi \cdot BC \cdot \frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{2} = \\
 &= 2\pi \cdot (AB + BC) \cdot \frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{2} = \\
 &= 2\pi (AB + BC) \cdot 2x_O = 2\pi P x_O, \quad (3)
 \end{aligned}$$

де P — периметр паралелограма.

2) Обертається правильний n -кутник зі стороною a . Нехай $x_1, x_2, \dots, x_n$ — абсиси його вершин. Із формули (2) за теоремою 1 дістаємо:

$$\begin{aligned}
 S &= 2\pi a \frac{x_1 + x_2}{2} + 2\pi a \frac{x_2 + x_3}{2} + \dots + 2\pi a \frac{x_n + x_1}{2} = \\
 &= 2\pi a (x_1 + x_2 + \dots + x_n) = 2\pi a \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = 2\pi P \cdot X, \quad (4)
 \end{aligned}$$

де P — периметр правильного n -кутника, X — середнє арифметичне абсис його вершин.

Зауваження. Для читачів, обізнаних із математичним аналізом, зазначимо, що формули (1), (3), (4) є окремими випадками (координатними аналогами) першої теореми Гульдіна¹: площа поверхні, утвореної обертанням плоскої кривої навколо осі, яка лежить у площині кривої й не перетинає її, дорівнює добутку довжини цієї кривої та довжини кола, описаного центром мас кривої.

Задача 1. У трикутнику ABC дано: $AB = c$, $AC = b$, $A = \alpha$. Цей трикутник обертається навколо осі, яка проходить зовні його через вершину A й утворює зі стороною AB кут φ ($0^\circ < \varphi < \alpha$). Знайдіть площу поверхні тіла обертання.

¹ Гульдін Пауль (1577–1643) — швейцарський математик.

Розв'язання

B' та C' — проєкції вершин B та C на вісь Oy (рис. 3). За теоремою косинусів $BC = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha}$. Із трикутника ABV' :

$$BB' = x_B = c \cdot \sin \varphi;$$

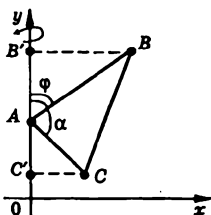


Рис. 3

із трикутника ACC' : $CC' = x_C = b \sin(\alpha + \varphi)$. Зрозуміло, що $x_A = 0$. Тепер згідно з формулами (1) та (2) маємо:

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \frac{x_A + x_B}{2} \cdot AB + 2\pi \frac{x_A + x_C}{2} \cdot AC + 2\pi \frac{x_B + x_C}{2} \cdot BC = \\ &= 2\pi \cdot \frac{c^2 \sin \varphi}{2} + 2\pi \frac{b^2 \sin(\alpha + \varphi)}{2} + \\ &+ 2\pi \frac{c \cdot \sin \varphi + b \sin(\alpha + \varphi)}{2} \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Відповідь. } \pi \cdot (c^2 \sin \varphi + b^2 \sin(\alpha + \varphi) + \\ + (c \cdot \sin \varphi + b \sin(\alpha + \varphi)) \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha}). \end{aligned}$$

Задача 2. У прямокутній трапеції, описаній навколо круга з радіусом R , гострий кут має величину α . Знайдіть площу поверхні тіла, утвореного під час обертання цієї трапеції навколо меншої з її непаралельних сторін.

Розв'язання. На рис. 4 зображено подану трапецію $ADCD$; E, G, F, K — точки дотику вписаного кола до сторін трапеції. Центр O вписаного кола лежить на перетині бісектрис кутів трапеції.

Отже,

$$\angle OBF = \frac{\alpha}{2}, \quad \angle OCE = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2};$$

$OKDE$ та $OCAF$ — квадрати зі стороною R . Із прямокутного трикутника OCE дістаємо

$$CE = R \cdot \operatorname{ctg}\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2};$$

із прямокутного трикутника OBG : $BF = R \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$. Тепер маємо:

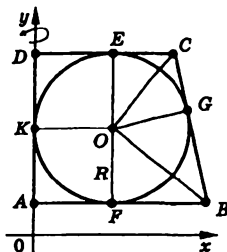


Рис. 4

$$DC = DE + EC = R + R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = R \frac{\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = x_D;$$

$$AB = AF + FB = R + R \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = R \frac{\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = x_B;$$

$$CB = CG + GB = CE + BF = R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + R \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = R \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

Згідно з формулами (1) і (2), дістаємо:

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \frac{x_D + x_C}{2} \cdot DC + 2\pi \frac{x_C + x_B}{2} \cdot CB + 2\pi \frac{x_A + x_B}{2} \cdot AB = \\ &= \pi R^2 \frac{\left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} + \pi R^2 \frac{\left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2}{\sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}} + \pi R^2 \frac{\left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \pi R^2 \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2 \cdot \frac{2}{\sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = 8\pi R^2 \frac{\left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2}{\sin^2 \alpha} = \\
 &= 8\pi R^2 \frac{\left(\sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \right)^2}{\sin^2 \alpha} = 16\pi R^2 \frac{\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin^2 \alpha}, \\
 &\quad \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right). \\
 &\text{Відповідь. } 16\pi R^2 \frac{\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin^2 \alpha}.
 \end{aligned}$$

Задача 3. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює a , кут при основі дорівнює α . Цей трикутник обертається навколо прямої, яка проходить через вершину, протилежну основі, паралельно до бісектриси кута α . Знайдіть площу поверхні тіла обертання.

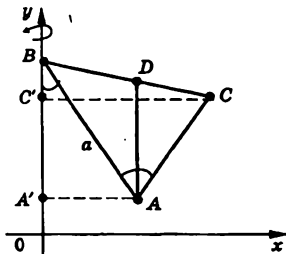


Рис. 5

Розв'язання. На рис. 5 AD — бісектриса кута A рівнобедреного трикутника ABC . За умовою $AB = CB = a$, $A = C = \alpha$. Тоді $B = 180^\circ - 2\alpha$; A' та C' — проєкції вершин A та C на вісь Oy . Оскільки $AD \parallel A'C'$, то $\angle ABA' = \angle BAD = \frac{\alpha}{2}$, а $\angle CBC' = 180^\circ - 2\alpha + \frac{\alpha}{2} = 180^\circ - \frac{3\alpha}{2}$. Із прямокутного трикутника ABA' : $AA' = x_A = a \sin \frac{\alpha}{2}$; із прямокутного трикутника CBC' :

$$CC' = x_C = a \sin \left(180^\circ - \frac{3\alpha}{2} \right) = a \sin \frac{3\alpha}{2}.$$

Із трикутника ABC знайдемо $AC = 2a \cdot \cos \alpha$. Із формул (1) і (2) дістанемо:

$$\begin{aligned}
 S &= 2\pi \frac{x_B + x_C}{2} a + 2\pi \frac{x_C + x_A}{2} \cdot 2a \cdot \cos \alpha + 2\pi \frac{x_B + x_A}{2} a = \\
 &= \pi a^2 \sin \frac{3\alpha}{2} + 2\pi a^2 \left(\sin \frac{3\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \right) \cos \alpha + \pi a^2 \sin \frac{\alpha}{2} = \\
 &= \pi a^2 \left(\sin \frac{3\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \right) (1 + 2 \cos \alpha) = 4\pi a^2 \sin \alpha \cdot \cos \frac{\alpha}{2} (\cos 60^\circ + \cos \alpha) = \\
 &= 8\pi a^2 \sin \alpha \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cos \left(30^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \cos \left(30^\circ - \frac{\alpha}{2} \right).
 \end{aligned}$$

Відповідь. $8\pi a^2 \sin \alpha \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \left(30^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \cos \left(30^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)$.

Задача 4. У паралелограмі $ABCD$ дано: $AB=a$, $AD=b$, $\angle BAD=\alpha$. Знайдіть площу поверхні тіла, утвореного під час обертання цього паралелограма навколо осі, яка проходить через вершину A зовні паралелограма й утворює зі стороною AB кут φ ($0^\circ < \varphi < \alpha$).

Розв'язання. На рис. 6 зображено паралелограм $ABCD$;

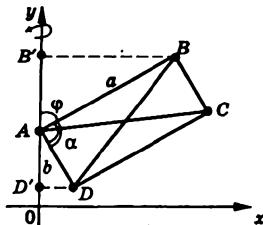


Рис. 6

B' і D' — проекції вершин B і D відповідно на вісь OY . Із трикутника BAB' : $BB' = x_B = a \cdot \sin \varphi$. Із трикутника DAD' :

$$DD' = x_D = b \cdot \sin(180^\circ - (\alpha + \varphi)) = b \cdot \sin(\alpha + \varphi);$$

O — центр паралелограма,

$$x_O = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{a \cdot \sin \varphi + b \cdot \sin(\alpha + \varphi)}{2}.$$

Периметр P паралелограма дорівнює $2(a+b)$. Тепер, згідно з формулою (3), дістаємо:

$$S = 2\pi \cdot 2(a+b) \cdot \frac{a \cdot \sin\varphi + b \cdot \sin(\alpha + \varphi)}{2}.$$

Відповідь. $2\pi(a+b)(a \cdot \sin\varphi + b \cdot \sin(\alpha + \varphi))$.

Задача 5. Правильний трикутник зі стороною a обертається навколо осі, яка проходить зовні через кінець сторони під кутом α ($0^\circ < \alpha < 60^\circ$) до неї. Знайдіть площу поверхні тіла обертання.

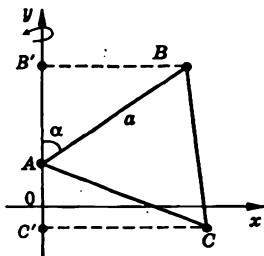


Рис. 7

Розв'язання. На рис. 7 точки B' та C' відповідно — проєкції вершин B та C трикутника ABC на вісь Oy ; $x_A = 0$. Із трикутника ABB' :

$$BB' = x_B = a \cdot \sin\alpha.$$

Із трикутника ACC' : $CC' = x_C = a \cdot \sin(60^\circ + \alpha)$. Тепер, згідно з формулою (4), дістаємо:

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \cdot 3a \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = 2\pi a (0 + a \cdot \sin\alpha + a \cdot \sin(60^\circ + \alpha)) = \\ &= 2\pi a^2 (\sin\alpha + a \cdot \sin(60^\circ + \alpha)) = 2\sqrt{3}\pi a^2 \sin(30^\circ + \alpha). \end{aligned}$$

Відповідь. $2\sqrt{3}\pi a^2 \sin(30^\circ + \alpha)$.

Вправи

1. Дано координати вершин трапеції: $A(0;5)$, $B(8;5)$, $C(5;2)$, $D(3;2)$. Знайдіть площу поверхні тіла, утвореного під час обертання цієї трапеції навколо осі Oy .

Відповідь. $16\pi(5 + 3\sqrt{2})$.

2. Дано координати вершин трикутника: $A(1;3)$, $B(4;7)$, $C(6;1)$. Знайдіть площу поверхні тіла, утвореного під час обертання цього трикутника навколо осі Oy .

Відповідь. $\pi(25+20\sqrt{10}+7\sqrt{29})$.

3. У трикутнику ABC дано: $AB=c$, $AC=b$, $\angle A=\alpha$. Вісь обертання проходить зовні трикутника через вершину A й утворює з його сторонами AB і AC рівні кути. Знайдіть площу поверхні тіла обертання.

Відповідь. $\pi(b^2+c^2+(b+c)\sqrt{b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha})\cos\frac{\alpha}{2}$.

4. Прямокутний трикутник має катети a і b . Вісь обертання проходить зовні трикутника через вершину прямого кута перпендикулярно до медіани, проведеної з вершини прямого кута. Знайдіть площу поверхні тіла обертання.

Відповідь. $\pi\left(\frac{a^3+b^3}{\sqrt{a^2+b^2}}+a^2+b^2\right)$.

5. Квадрат має сторону a . Вісь обертання проходить зовні квадрата через його вершину й утворює з його стороною гострий кут φ . Знайдіть площу поверхні тіла обертання.

Відповідь. $4\sqrt{2}\pi a^2 \sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)$.

6. Правильний n -кутник зі стороною a обертається навколо осі, яка проходить через його вершину зовні й утворює зі стороною кут φ ($0^\circ < \varphi < 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$). Знайдіть площу поверхні тіла обертання.

Відповідь. $\pi a^2 \frac{\cos\left(\varphi - \frac{180^\circ}{n}\right)}{\sin\frac{180^\circ}{n}}$.

II. Об'єми V тіл обертання

Теорема 2. Об'єм V тіла, утвореного від обертання трикутника навколо осі Oy , що не перетинає його, можна знайти за формулою

$$V = 2\pi S \cdot \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad (5)$$

де x_1, x_2, x_3 — абсциси вершин трикутника, S — його площа.

Доведення. Можливі такі випадки:

1) Дві вершини трикутника лежать на осі обертання (рис. 8, а). Точка B' — проекція вершини B на вісь Oy ; $V = V_1 + V_2$, де V_1 — об'єм конуса CBB' , V_2 — об'єм конуса ABB' ;

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi B'B^2 \cdot CB', \quad V_2 = \frac{1}{3}\pi B'B^2 \cdot AB',$$

$$V = \frac{1}{3}\pi B'B^2 \cdot CA = \frac{2\pi}{3} B'B \cdot CA \cdot B'B = 2\pi \cdot S \cdot x_B = 2\pi S \cdot \frac{x_A + x_B + x_C}{3},$$

оскільки $x_C = x_A = 0$.

Зауваження. Ми розглянули випадок, коли точка B' лежить у середині відрізка CA . У випадку, коли точка B' лежить зовні відрізка CA або на його кінці, доведення аналогічне.

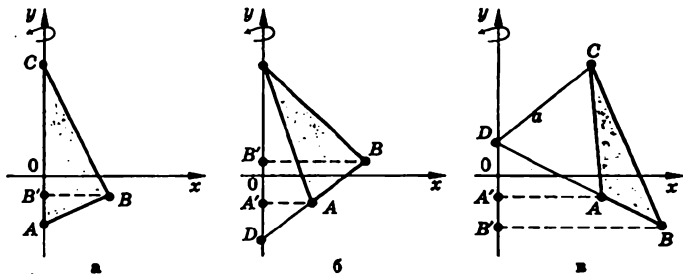


Рис. 8

2) Тільки одна вершина трикутника лежить на осі обертання (рис. 8б). Точки A' та B' відповідно — проекції вершин A та B на вісь Oy , $x_C = 0$. D — точка перетину променя BA з віссю Oy . Маємо

$$V = V_1 - V_2,$$

де V_1 — об'єм тіла, утвореного під час обертання трикутника CBD , V_2 — об'єм тіла, утвореного під час обертання трикутника CAD . У трикутників CBD та CAD сторона CD лежить на осі обертання. Згідно з випадком 1), маємо:

$$V = 2\pi S_{\triangle CBD} \cdot \frac{x_B}{3} - 2\pi S_{\triangle CAD} \cdot \frac{x_A}{3}. \quad (6)$$

Помітимо, що $\frac{S_{\triangle CBD}}{S} = \frac{BD}{BA} = \frac{x_B}{x_B - x_A}$, звідки $S_{\triangle CBD} = S \cdot \frac{x_B}{x_B - x_A}$;

$$\frac{S_{\Delta CAD}}{S} = \frac{DA}{AB} = \frac{x_A}{x_B - x_A},$$

звідки $S_{\Delta CAD} = S \cdot \frac{x_A}{x_B - x_A}$. Тепер із рівності (6) дістаємо:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi S \frac{x_B^2}{3(x_B - x_A)} - 2\pi S \frac{x_A^2}{3(x_B - x_A)} = \\ &= 2\pi S \frac{x_B + x_A}{3} = 2\pi S \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \text{ бо } x_C = 0. \end{aligned}$$

Зауваження. Випадок, коли сторона AB паралельна осі Oy , розгляньте самостійно.

3) На осі обертання немає жодної вершини трикутника (рис. 8в). Точки A' і B' відповідно — проекції вершин A і B на вісь Oy ; D — точка перетину променя BA з віссю Oy . Маємо

$$V = V_{\Delta BDC} - V_{\Delta ADC}. \quad (7)$$

Трикутники BDC і ADC мають вершину D на осі Oy . Помітимо, що $\frac{S_{\Delta BDC}}{S} = \frac{BD}{AB} = \frac{x_B}{x_B - x_A}$, звідси $S_{\Delta BDC} = S \cdot \frac{x_B}{x_B - x_A}$. Аналогічно

$S_{\Delta ADC} = S \cdot \frac{x_A}{x_B - x_A}$. Згідно з випадком 2), маємо з рівності (7):

$$\begin{aligned} V &= 2\pi S_{\Delta BDC} \frac{x_B + x_C}{3} - 2\pi S_{\Delta ADC} \frac{x_A + x_C}{3} = \\ &= 2\pi S \frac{x_B(x_B + x_C)}{3(x_B - x_A)} - 2\pi S \frac{x_A(x_A + x_C)}{3(x_B - x_A)} = 2\pi S \frac{x_A + x_B + x_C}{3}. \end{aligned}$$

Теорему доведено.

Якщо обертається багатокутник, то розіб'ємо його на кілька трикутників. Очевидно,

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_k, \quad (8)$$

де V — об'єм тіла обертання, $V_1, V_2, \dots, V_k$ — об'єми тіл, утворених під час обертання цих трикутників.

Розглянемо поодинокі випадки.

1) Обертається паралелограм $ABCD$. Нехай точка O — центр паралелограма. Згідно з рівностями (8) і (5):

$$\begin{aligned}
 V &= V_{\triangle ACD} + V_{\triangle CBD} = 2\pi \cdot \frac{1}{2} S \frac{x_A + x_B + x_D}{3} + 2\pi \cdot \frac{1}{2} S \frac{x_C + x_B + x_D}{3} = \\
 &= 2\pi \cdot \frac{1}{2} S \frac{x_A + x_C + 2(x_B + x_D)}{3}.
 \end{aligned} \quad (9)$$

Оскільки для паралелограма $x_A + x_C = x_B + x_D = 2x_O$, із рівності (9) маємо:

$$V = 2\pi \cdot \frac{1}{2} S \cdot 2x_O = 2\pi S x_O. \quad (10)$$

2) Обертається правильний n -кутник зі стороною a . Нехай точка O — центр цього многокутника, $x_1, x_2, \dots, x_n$ — абсциси його вершин. Сполучимо точку O з вершинами правильного многокутника $A_1, A_2, \dots, A_n$. Тоді многокутник розбивається на n рівних трикутників: $\triangle A_1 A_2 O, \triangle A_2 A_3 O, \dots, \triangle A_n A_1 O$. Площа кожного з трикутників дорівнює $\frac{S}{n}$. Згідно з формулами (8) і (5), маємо:

$$\begin{aligned}
 V &= V_1 + V_2 + \dots + V_n = 2\pi \frac{S}{n} \frac{x_{A_1} + x_{A_2} + x_O}{3} + \\
 &+ 2\pi \frac{S}{n} \frac{x_{A_2} + x_{A_3} + x_O}{3} + \dots + 2\pi \frac{S}{n} \frac{x_{A_n} + x_{A_1} + x_O}{3} = \\
 &= 2\pi \frac{S}{n} \frac{2(x_{A_1} + x_{A_2} + \dots + x_{A_n}) + nx_O}{3}.
 \end{aligned} \quad (11)$$

Відомо, що $x_{A_1} + x_{A_2} + \dots + x_{A_n} = nx_O$. Тоді з рівності (11) дістаємо:

$$V = 2\pi \frac{S}{n} \frac{3nx_O}{3} = 2\pi S x_O. \quad (12)$$

Зауваження. Для читачів, обізнаних із математичним аналізом, зазначимо, що формули (5), (10), (12) є окремими випадками (координатними аналогами) другої теореми Гульдіна: *об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури навколо осі, яка лежить у площині цієї фігури й не перетинає її, дорівнює добутку площі фігури на довжину кола, описаного центром мас фігури.*

Задача 1. Дано координати вершин трикутника: $A(1; 5)$, $B(7; 2)$, $C(3; -3)$. Знайдіть об'єм тіла, утвореного під час обертання трикутника ABC навколо осі Oy .

Розв'язання. Використаємо відому формулу

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\overline{AB \cdot AC})^2}.$$

Послідовно знаходимо:

$$AB^2 = 45, AC^2 = 68, \overline{AB} = (6; -3), \overline{AC} = (2; -8),$$

$$\overline{AB \cdot AC} = 6 \cdot 2 + 3 \cdot 8 = 36, (\overline{AB \cdot AC})^2 = 36^2;$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{45 \cdot 68 - 36^2} = \frac{1}{2} \sqrt{1764} = \frac{1}{2} \cdot 42 = 21.$$

Згідно з формулою (5), дістанемо:

$$V = 2\pi \cdot 21 \cdot \frac{1+7+3}{8} = 154\pi.$$

Відповідь. 154 π .

Задача 2. Дано координати вершин чотирикутника: $A(1; 4)$, $B(6; 6)$, $C(9; -1)$, $D(2; -2)$. Знайдіть об'єм тіла, утвореного під час обертання чотирикутника $ABCD$ навколо осі Oy .

Розв'язання. Маємо

$$V = V_1 + V_2,$$

де V_1 — об'єм тіла, утвореного під час обертання трикутника ABC , V_2 — об'єм тіла, утвореного під час обертання трикутника ADC навколо осі Oy . Далі дістанемо:

$$\overline{AB}(5; 2), \overline{AC}(8; -5), \overline{AD}(1; -6), AB^2 = 29, AC^2 = 89, AD^2 = 37,$$

$$\overline{AB \cdot AC} = 5 \cdot 8 + 2 \cdot (-5) = 30, \overline{AC \cdot AD} = 8 \cdot 1 + 5 \cdot 6 = 38;$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{29 \cdot 89 - 30^2} = \frac{1}{2} \sqrt{1681} = \frac{1}{2} \cdot 41 = \frac{41}{2},$$

$$V_1 = 2\pi \cdot \frac{41}{2} \cdot \frac{1+6+9}{3} = 218 \frac{2}{3} \pi;$$

$$S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} \sqrt{89 \cdot 37 - 38^2} = \frac{1}{2} \sqrt{1849} = \frac{1}{2} \cdot 43 = \frac{43}{2},$$

$$V_2 = 2\pi \cdot \frac{43}{2} \cdot \frac{1+9+2}{3} = 172\pi; \quad V = 218 \frac{2}{3} \pi + 172\pi = 390 \frac{2}{3} \pi.$$

Відповідь. 390 $\frac{2}{3} \pi$.

Задача 3. Прямокутний трикутник має площу S . Медіана цього трикутника, проведена з вершини прямого кута, дорівнює m . Трикутник обертається навколо осі, яка проходить через вершину прямого кута зовні трикутника. Який найбільший об'єм може мати тіло обертання?

Розв'язання. Точка C — вершина прямого кута трикутника ABC (рис. 9). M — центр мас цього трикутника, CD — його медіана. Відомо, що $CM = \frac{2}{3}CD = \frac{2}{3}m$; $V = 2\pi S \cdot x_M$. Зрозуміло, що

$$x_M = MM' \leq CM = \frac{2}{3}m.$$

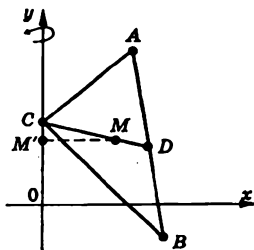


Рис. 9

Отже, $\max V = 2\pi S \cdot \frac{2}{3}m = \frac{4}{3}\pi Sm$. В екстремальному випадку вісь Oy перпендикулярна до медіани CD .

Відповідь. $\frac{4}{3}\pi Sm$.

Задача 4. Сторони паралелограма мають довжини a і b , кут між ними дорівнює α . Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням цього паралелограма навколо осі, що проходить через його вершину перпендикулярно до діагоналі.

Розв'язання. Точка O — центр поданого паралелограма $ABCD$ (рис. 10);

$$AB = a, AD = b, \angle BAD = \alpha.$$

$$\text{Послідовно знаходимо } S = ab \cdot \sin \alpha, AC = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos \alpha},$$

$$x_0 = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos \alpha}.$$

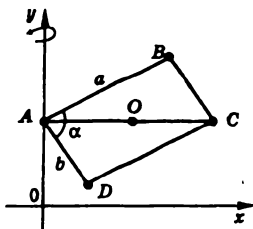


Рис. 10

Згідно з формулою (10),

$$V = 2\pi \cdot ab \cdot \sin \alpha \cdot \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos \alpha}.$$

Відповідь. $\pi ab \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos \alpha} \cdot \sin \alpha$.

Задача 5. Правильний шестикутник зі стороною a обертається навколо зовнішньої осі, яка паралельна стороні шестикутника і віддалена від цієї сторони на відстань a . Знайдіть об'єм тіла обертання.

Розв'язання. Точка O' — проекція центра O шестикутника на вісь Oy (рис. 11). Послідовно знаходимо

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2, \quad x_0 = OO' = a + a \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Тепер із формули (12) дістаємо:

$$V = 2\pi \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 \cdot a \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})}{2} \pi a^3.$$

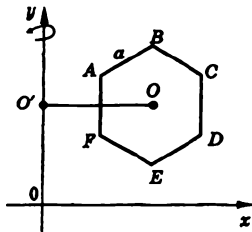


Рис. 11

Відповідь. $\frac{3\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}{2}\pi a^3$.

Вправи

1. Дано координати вершин трикутника $A(1; 2)$, $B(4; 4)$, $C(2; -2)$. Знайдіть об'єм тіла, утвореного під час обертання цього трикутника навколо осі Oy .

Відповідь. $32\frac{2}{3}\pi$.

2. Дано координати вершин чотирикутника $A(1; 3)$, $B(6; 8)$, $C(9; 6)$, $D(4; 1)$. Знайдіть об'єм тіла, утвореного під час обертання цього чотирикутника навколо осі Oy .

Відповідь. 250π .

3. Доведіть, що об'єми тіл, під час обертання паралелограма поспільно навколо двох суміжних сторін, обернено пропорційні цим сторонам.

4. Сторони паралелограма дорівнюють a і b , а кут між ними — φ . Цей паралелограм обертається навколо осі, що проходить зовні через його вершину й утворює з двома сторонами, що виходять із цієї вершини, рівні кути. Знайдіть об'єм тіла обертання.

Відповідь. $\pi ab(a+b)\cos\frac{\varphi}{2}\sin\varphi$.

5. Спочатку рівносторонній трикутник обертається навколо сторони, а потім навколо прямої, яка проходить через його вершину паралельно стороні. Доведіть, що тіло, утворене вдруге, має удвічі більший об'єм, ніж перше тіло.

6. Прямокутний трикутник із катетами a і b ($a > b$) обертається навколо зовнішньої осі, яка паралельна більшому катету й віддалена від нього на відстань c ($c < b$). Знайдіть об'єм тіла обертання.

Відповідь. $\frac{1}{3}\pi ab(3c+b)$.

7. Правильний n -кутник $A_1A_2, \dots, A_n$ зі стороною a обертається навколо зовнішньої осі, що проходить через вершину A_1 й утворює зі сторонами A_1A_2 та A_1A_n рівні кути. Знайдіть об'єм тіла обертання.

Відповідь. $\frac{1}{4}\pi na^3 \cdot \frac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}$.

Навчальне видання

**КУКУШ Олександр Георгійович
УШАКОВ Рудольф Петрович**

**На допомогу керівникам
математичних гуртків.
Функції, планіметрія, стереометрія**

Навчально-методичний посібник

**Головний редактор І. С. Маркова
Редактор Г. О. Новак
Коректор О. М. Журенко
Комп'ютерна верстка О. В. Лебедева**

Підп. до друку 10.02.2011. Формат 60×90/16. Папір газет.
Гарнітура шкільна. Друк офсет. Ум. друк. арк. 5,0. Зам. № 11-02/14-04.

ТОВ «Видавнича група «Основа».
Свідцтво суб'єкта видавничої справи КВ № 1390-263Р від 26.06.2006.
Україна, 61001 Харків, вул. Плеханівська, 66. Тел. (057) 731-96-83

Віддруковано з готових плівок ПП «Тріада+».
Свідцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1870 від 16.07.2007.
Харків, вул. Киргизька, 19. Тел.: (057) 757-98-16, 757-98-15.