Математика вчить мислити й разом з тим вселяє віру в безмежні сили людського розуму. Вона виховує волю, характер.
В.О.Сухомлинський

МАТЕМАТИКА Шкільний світ

За сприяння Міністерства освіти і науки України

Видається з 1 вересня 1998 року 4 рази на місяць № 25–26 (425–426), липень 2007

Пам'яті моєї дочки Ганни
присвячується

Олександр Кукуш

МОНОТОННІ ПОСЛІДОВНОСТІ І ФУНКЦІЇ

Навчально-методичний посібник

Рецензенти:

О.С.Мартинова, вчитель-методист Природничо-наукового ліцею № 145 м.Києва, тричі Соросівський вчитель, Відмінник освіти України,

Г.О.Михалін, доктор педагогічних наук, доцент, Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова,

Г.М.Шевченко, кандидат фізико-математичних наук, Київський національний університет імені Тараса Шевченка.

Кукуш, Олександр.
Монотонні послідовності і функції: Навч.-метод. посіб.

У посібнику розглянуто властивості монотонних послідовностей і функцій, при цьому елементарні методи дослідження вдало доповнюються методами диференціального числення. Наведено цікаві застосування до нерівностей, рівнянь і побудови кривих. Дано фізичну інтерпретацію будови монотонних функцій. Виклад супроводжується розв'язаннями задач. У посібнику включено також вправи для самостійного розв'язування, частина з них має нестандартний, олімпіадний характер.

Для вчителів, студентів та учнів фізико-математичних і середніх загальноосвітніх шкіл.

© О. Кукуш, 2007

Зміст

Передмова 4
Розділ І. Упорядковані набори чисел 5
§ 1. Одна властивість упорядкованих наборів 5
§ 2. Нерівність Чебишова 8
§ 3. Перетворення Абеля і нерівності 12
§ 4. Виділення впорядкованого набору 15
Розділ ІІ. Монотонні послідовності 18
§ 1. Приклади 18
§ 2. Монотонні підпослідовності 22
§ 3. Границя послідовності 27
§ 4. Теорема Вейєрштрасса 33
Розділ ІІІ. Елементарні властивості монотонних функцій 42
§ 1. Означення та найпростіші приклади 42
§ 2. Монотонність породжує монотонність 45
§ 3. Інші приклади монотонних функцій 48
§ 4. Елементарне дослідження функцій на монотонність 52
§ 5. Функціональні рівняння 58
Розділ ІV. Монотонність і похідна 66
§ 1. Критерії монотонності 66
§ 2. Дослідження функцій на монотонність за допомогою похідної 71
§ 3. Застосування поняття монотонності до доведення нерівностей 76
§ 4. Застосування поняття монотонності до розв'язування рівнянь 82
§ 5. Застосування монотонних функцій для дослідження послідовностей на монотонність 85
§ 6. Побудова кривих, заданих параметрично 89
Розділ V. Структура монотонних функцій 94
§ 1. Існування границі 94
§ 2. Стрибки монотонної функції 98
§ 3. Монотонна функція, розривна в раціональних точках 104
§ 4. Теорема про розклад 108
§ 5. Монотонність відносно квазіконуса і теорема Вейєрштрасса 118

ПЕРЕДМОВА

Спробуйте для додатних чисел a, b, c довести нерівність

$$a\cdot 2^{-a}+b\cdot 2^{-b}+c\cdot 2^{-c}\le a\cdot 2^{a-b-c}+b\cdot 2^{-a+b-c}+c\cdot 2^{-a-b+c}.$$

Нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним Вам у цьому не допоможе. Або дослідіть на монотонність функцію

$$f(x)=\frac{\lg(1+x)}{\lg x}.$$

Застосування похідної тут недоцільне, краще використовувати властивості монотонних функцій. Подібні цікаві задачі, пов'язані з ідеєю монотонності, розглядаються у цій книжці.

Монотонні послідовності відіграють важливу роль у математичному аналізі. Так, основа натуральних логарифмів – число e – вводиться зазвичай як границя монотонної та обмеженої послідовності

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ n\ge 1.$$

Дослідження функції на монотонність є істотною частиною побудови її графіка – воно дає змогу знайти точки екстремуму і визначити характер зміни функції. Монотонні функції також широко використовуються у теорії міри і теорії ймовірностей.

Саме слово «монотонність» утворено з двох грецьких слів μόνος (один, єдиний) і τόνος (натяг, напруга, тон). Буквальне значення терміна – однотонність. Цей термін у 1881 р. увів видатний німецький фізик і математик, автор фундаментальних робіт з математичної фізики Карл Готфрід Нейман (1832–1925), який застосував його спочатку до монотонних числових послідовностей. Ще раніше, у 1837 р., поняття монотонності строго визначив видатний німецький математик, автор важливих відкриттів у математичному аналізі, теорії чисел і математичній фізиці Петер Густав Лежен Діріхле (1805–1859), досліджуючи розклади функцій у тригонометричні ряди.

У цій книжці систематично викадено матеріал про монотонні послідовності, як скінченні, так і нескінченні, а також монотонні функції. Подано несподівані застосування монотонності до доведення нерівностей, розв'язування рівнянь і побудови кривих.

Автор висловлює подяку кандидату фізико-математичних наук В. Б. Брайману за ретельний перегляд книжки і внесення виправлень та уточнень у видання.

РОЗДІЛ І. УПОРЯДКОВАНІ НАБОРИ ЧИСЕЛ

§ 1. Одна властивість упорядкованих наборів

Почнемо з цікавої нерівності.

Задача 1. Довести, що для будь-яких додатних чисел a, b, c справедливі співвідношення

$$a\cdot 2^{-a}+b\cdot 2^{-b}+c\cdot 2^{-c}\le \frac{b+c}{2}\cdot 2^{-a}+\frac{c+a}{2}\cdot 2^{-b}+\frac{a+b}{2}\cdot 2^{-c}$$

$$\le a\cdot 2^{a-b-c}+b\cdot 2^{-a+b-c}+c\cdot 2^{-a-b+c}. \qquad (1.1)$$

Один з можливих підходів до розв'язування полягає в наступному. Розглянемо дві трійки додатних чисел:

$$x_1, x_2, x_3;\ \ y_1, y_2, y_3.$$

Вважатимемо, що обидві трійки упорядковані за зростанням, тобто

$$x_1\le x_2\le x_3,\ \ y_1\le y_2\le y_3.$$

Утворимо суму

$$S=x_1y_i+x_2y_j+x_3y_k.$$

Тут i, j, k – номери 1, 2, 3, записані в довільному порядку. Як вибрати цей порядок так, щоб сума S виявилася найбільшою (найменшою) з можливих?

Виявляється (нижче це буде строго доведено), що сума буде більшою, якщо більші числа множити на більші, а менші на менші. Також сума буде меншою, якщо більші числа множити на менші, а менші на більші. Іншими словами, справедлива нерівність

$$x_1y_3+x_2y_2+x_3y_1\le S\le x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3. \qquad (1.2)$$

Розв'язання задачі 1

Доведемо спочатку першу з нерівностей (1.1). Запишемо дві трійки чисел, вважаючи $a\le b\le c$, а тому $2^{-a}\ge 2^{-b}\ge 2^{-c}$:

$$a,\ \ b,\ \ c;$$

$$2^{-a}, 2^{-b}, 2^{-c}.$$

Ми розмістили найбільше з чисел першої трійки над найменшим із чисел другої трійки, найменше з чисел першої трійки розташовано над найбільшим із чисел другої трійки. З нерівності (1.2) випливають співвідношення:

$$a\cdot 2^{-a}+b\cdot 2^{-b}+c\cdot 2^{-c}\le a\cdot 2^{-b}+b\cdot 2^{-c}+c\cdot 2^{-a},$$

$$a\cdot 2^{-a}+b\cdot 2^{-b}+c\cdot 2^{-c}\le a\cdot 2^{-c}+b\cdot 2^{-a}+c\cdot 2^{-b}.$$

Додаючи ці нерівності, одержуємо

$$2\left(a\cdot 2^{-a}+b\cdot 2^{-b}+c\cdot 2^{-c}\right)\le (b+c)\cdot 2^{-a}+(c+a)\cdot 2^{-b}+(a+b)\cdot 2^{-c}.$$

Для доведення другої з нерівностей (1.1) розглянемо трійки чисел:

$$a\cdot 2^{a},\ b\cdot 2^{b},\ c\cdot 2^{c};$$

$$2^{a},\ 2^{b},\ 2^{c}.$$

Оскільки $0<a\le b\le c$, то $2^{a}\le 2^{b}\le 2^{c}$ і $a\cdot 2^{a}\le b\cdot 2^{b}\le c\cdot 2^{c}$. Тому з нерівності (1.2) випливає

$$a\cdot 2^{2a}+b\cdot 2^{2b}+c\cdot 2^{2c}\ge a\cdot 2^{a+b}+b\cdot 2^{b+c}+c\cdot 2^{c+a},$$

$$a\cdot 2^{2a}+b\cdot 2^{2b}+c\cdot 2^{2c}\ge a\cdot 2^{a+c}+b\cdot 2^{a+b}+c\cdot 2^{b+c}.$$

Додаючи ці нерівності, маємо

$$2\left(a\cdot 2^{2a}+b\cdot 2^{2b}+c\cdot 2^{2c}\right)\ge (a+b)\cdot 2^{a+b}+(b+c)\cdot 2^{b+c}+(c+a)\cdot 2^{c+a}. \quad (1.3)$$

Помноживши обидві частини нерівності (1.3) на 2^{-a-b-c}, одержимо шукане співвідношення. ∎

Завдання 1. Для додатних a, b, c довести нерівність

$$a+b+c\le\frac{b^3+c^3}{2a^2}+\frac{c^3+a^3}{2b^2}+\frac{a^3+b^3}{2c^2}.$$

У розв'язанні задачі 1 особливу роль відіграли впорядковані трійки чисел. Розглянемо тепер набори з n чисел. Числам у наборах присвоєно номери 1, 2, ..., n.

Означення 1. *Набір чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ називається упорядкованим за зростанням, якщо для кожного k, $1\le k\le n-1$, має місце нерівність $a_k\le a_{k+1}$, і називається упорядкованим за спаданням, якщо з нерівності $1\le k\le n-1$ випливає співвідношення $a_k\ge a_{k+1}$. Набір чисел, упорядкований або за зростанням, або за спаданням, називається упорядкованим.*

Іншими словами, упорядкованість за зростанням даних чисел зберігає порядок, тобто більшим індексам відповідають більші числа. Упорядкованість за спаданням змінює порядок на протилежний: більшим індексам відповідають менші числа.

Завдання 2. Набір чисел $\{a_k, 1 \le k \le n\}$ упорядкований тоді і тільки тоді, коли $|a_1 - a_2| + ... + |a_{n-1} - a_n| = |a_1 - a_n|$. Довести. Дати геометричне тлумачення.

Перейдемо тепер до доведення нерівності (1.2), точніше, до її узагальнення.

Теорема **1.** *Нехай дано два упорядкованих за зростанням набори чисел:*

$$a_1 \le a_2 \le ... \le a_n;$$

$$b_1 \le b_2 \le ... \le b_n.$$

Для довільної перестановки $i(1), i(2), ..., i(n)$ *чисел* 1, 2, ..., *n і відповідної суми*

$$\sigma = a_1 b_{i(1)} + a_2 b_{i(2)} + ... + a_n b_{i(n)}$$

виконуються нерівності

$$a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + ... + a_n b_1 \le \sigma \le a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n. \qquad (1.4)$$

Доведення

Доведемо справедливість тільки другої з нерівностей (1.4) (першу доведіть самостійно).

Перевіримо спочатку виконання нерівності (1.4), якщо $n = 2$. Нетотожна перестановка чисел 1, 2 є перестановкою $i(1) = 2$, $i(2) = 1$, і вираз (1.4) перетворюється у нерівність

$$a_1 b_2 + a_2 b_1 \le a_1 b_1 + a_2 b_2, \qquad (1.5)$$

яка рівносильна очевидній нерівності $(a_2 - a_1)(b_2 - b_1) \ge 0$.

Тепер нескладно довести наше твердження для довільного n. Справді, нехай сума σ містить доданки $a_j b_k$ та $a_l b_m$, для яких $j < l$, $k > m$ і, отже, $b_k \ge b_m$. Поміняємо місцями числа b_k та b_m. Згідно з нерівністю (1.5) одержимо суму $\sigma' \ge \sigma$ з доданками $a_j b_m$ та $a_l b_k$. Послідовно виконуючи такі перестановки, через скінченну кількість кроків прийдемо до суми $S = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n$. Тому $S \ge \sigma$. ∎

Завдання 3. Оцінити, скільки кроків достатньо, щоб суму σ перетворити в S.

Завдання 4. Чи не можна послабити вимогу додатності чисел a, b, c у задачі 1?

Завдання 5. Коли в одній з нерівностей (1.4) можлива рівність?

Теорема 1 дає можливість доводити багато цікавих нерівностей. Докладніше про це див. у статті Л.Пінтера, Й.Хегедиша «Упорядоченные наборы чисел и неравенства» («Квант», 1985, № 12).

§ 2. Нерівність Чебишова

Зупинимося на одному із застосувань доведеної теореми. Розглянемо два упорядкованих за зростанням набори: $a_1, ..., a_n$ та $b_1, ..., b_n$.

Теорема 1. *Справедливим є співвідношення*

$$(a_1+a_2+...+a_n)(b_1+b_2+...+b_n)\le n(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n). \qquad (2.1)$$

Доведення

Теорема 1 §1 стверджує, що

$$S=a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n \ge a_1b_{i(1)}+a_2b_{i(2)}+...+a_nb_{i(n)}.$$

Послідовно перебираючи перестановки $i(1), i(2), ..., i(n)$, одержуємо n нерівностей:

$$a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n \le S,$$
$$a_1b_2+a_2b_3+...+a_{n-1}b_n+a_nb_1 \le S,$$
$$a_1b_3+a_2b_4+...+a_{n-2}b_n+a_{n-1}b_1+a_nb_2 \le S,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_1b_n+a_2b_1+a_3b_2+...+a_nb_{n-1} \le S.$$

Додамо їх і отримаємо

$$a_1(b_1+...+b_n)+a_2(b_1+...+b_n)+...+a_n(b_1+...+b_n)=$$
$$=(a_1+...+a_n)(b_1+...+b_n)\le nS. \blacksquare$$



Нерівність 2.1 називають нерівністю Чебишова – за ім'ям видатного російського математика і механіка, засновника петербурзької математичної школи Пафнутія Львовича Чебишова (1812–1894). Основні його праці стосуються математичного аналізу, теорії наближення функцій поліномами, теорії чисел, теорії ймовірностей, теорії машин і механізмів.

Завдання 1. Довести, що у нерівності Чебишова рівність досягається тоді і тільки тоді, коли або всі a_i, або всі b_j рівні між собою.

Вказівка. Попередньо розв'яжіть завдання 5 § 1.

Завдання 2. Якщо набір $a_1, ..., a_n$ упорядкований за зростанням, а набір $b_1, ..., b_n$ – за спаданням, то в нерівності (2.1) знак нерівності змінюється на протилежний. Довести.

Завдання 3. Нерівність Чебишова не є достатньою умовою упорядкованості, тобто існують упорядкований за зростанням набір $a_1, ..., a_n$ і невпорядкований набір $b_1, ..., b_n$, для яких виконується нерівність (2.1). Довести.

З нерівності Чебишова можна вивести наступну важливу нерівність.

Наслідок 1. *Нехай $a_1, ..., a_n$ – набір невід'ємних чисел, $k \geq 2$ – натуральне число. Тоді*

$$\frac{a_1 + ... + a_n}{n} \leq \sqrt[k]{\frac{a_1^k + ... + a_n^k}{n}}. \qquad (2.2)$$

Доведення

Не обмежуючи загальності, можна вважати, що даний набір упорядкований за зростанням. Покладаючи $b_i = a_i^{k-1}$, $1 \leq i \leq n$, одержуємо згідно з нерівністю (2.1) наступну нерівність для довільних натуральних $k \geq 2$:

$$n^k \cdot \frac{a_1^k + ... + a_n^k}{n} = n^{k-1}\left(a_1^k + ... + a_n^k\right) \geq n^{k-2}\left(a_1^{k-1} + ... + a_n^{k-1}\right)\left(a_1 + ... + a_n\right). \qquad (2.3)$$

Використовуючи вираз (2.3) $(k-1)$ разів, послідовно отримуємо:

$$n^k \cdot \frac{a_1^k + ... + a_n^k}{n} \geq n^{k-2}\left(a_1^{k-1} + ... + a_n^{k-1}\right)\left(a_1 + ... + a_n\right) \geq$$

$$\geq n^{k-3}\left(a_1^{k-2} + ... + a_n^{k-2}\right)\left(a_1 + ... + a_n\right)^2 \geq ... \geq$$

$$\geq n\left(a_1^2 + ... + a_n^2\right)\left(a_1 + ... + a_n\right)^{k-2} \geq \left(a_1 + ... + a_n\right)^k. \qquad (2.4)$$

З нерівності (2.4) випливає шукане. ∎

Завдання 4. Коли в нерівності (2.2) можлива рівність?

Завдання 5. Довести таке узагальнення нерівності Чебишова: нехай дано три упорядковані за зростанням набори додатних чисел: $\{a_i\}, \{b_i\}, \{c_i\}$. Тоді $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_i\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i c_i$.

Чи не можна відкинути умову додатності цих чисел?

Завдання 6. Для додатних чисел $a_1, ..., a_n$ довести нерівності:

1) $(a_1+...+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+...+\frac{1}{a_n}\right)\geq n^2$ (*вказівка*: нехай $a_1\leq...\leq a_n$, тоді $\frac{1}{a_1}\geq...\frac{1}{a_n}$, і залишається використати завдання 2);

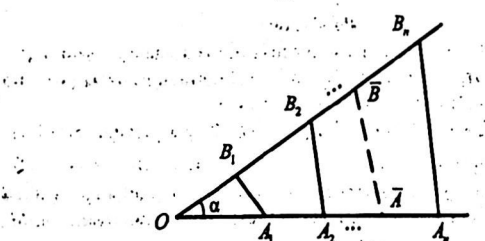
2) $(a_1a_2...a_n)^{\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}}\leq a_1^{a_1}a_2^{a_2}...a_n^{a_n}$ (*вказівка*: прологарифмуйте цю нерівність).

Завдання 7*. Нехай $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ – набори з теореми 1; $\{\lambda_i, 1\leq i\leq n\}$ – такий набір додатних чисел, що $\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n=1$. Довести нерівність

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i b_i\right)\leq\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i b_i.$$

Вказівка. Використовуючи теорему 1, довести нерівність спочатку для раціональних ваг $\{\lambda_i\}$, а потім наблизити задані вагові коефіцієнти раціональними.

Нерівність Чебишова має цікаве геометричне тлумачення. Нехай $\{a_i, 1\leq i\leq n\}$ і $\{b_i, 1\leq i\leq n\}$ – упорядковані за зростанням набори додатних чисел. На стороні OA кута $AOB = \alpha$ (мал. 1) відкладаємо відрізки $OA_1=a_1$, $OA_2=a_2$, ..., $OA_n=a_n$, а на стороні OB – відрізки $OB_1=b_1$, $OB_2=b_2$, ..., $OB_n=b_n$.



Мал. 1

Нехай S_i – площа ΔA_iOB_i. Введемо ще «середні» точки $\overline{A}$ та $\overline{B}$ відповідно на сторонах OA і OB такі, що

$$O\overline{A}=\frac{OA_1+OA_2+...+OA_n}{n},\ O\overline{B}=\frac{OB_1+OB_2+...+OB_n}{n}.$$

Нехай $\overline{S}$ – площа «середнього» $\Delta\overline{A}O\overline{B}$. За нерівністю Чебишова маємо

$$\overline{S}=\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\cdot\frac{b_1+b_2+...+b_n}{n}\cdot\frac{\sin\alpha}{2}\le$$

$$\le\frac{a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n}{n}\cdot\frac{\sin\alpha}{2}=\frac{S_1+S_2+...+S_n}{n}.$$

Отже, геометричний зміст нерівності Чебишова полягає в тому, що площа середнього трикутника не перевищує середньої площі трикутників, що відтинаються від кута. Інакше кажучи, усереднення за довжинами бічних сторін дає меншу площу, ніж усереднення самої площі трикутників.

Завдання 8. Дати геометричну інтерпретацію нерівності із завдання 5.

Теорема 1 може використовуватися для одержання планіметричних нерівностей.

Задача 1. Розглянемо трикутник зі сторонами a, b, c та відповідними внутрішніми кутами A, B, C. Довести, що

$$\frac{aA+bB+cC}{a+b+c}\ge\frac{\pi}{3}. \qquad (2.5)$$

Розв'язання

Нехай $a\le b\le c$. Оскільки в трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, то $A\le B\le C$. З нерівності Чебишова випливає, що $(a+b+c)(A+B+C)=\pi(a+b+c)\le 3(aA+bB+cC)$.

Додатково досліджуємо, коли у виразі (2.5) можлива рівність. Згідно із завданням 1 рівність досягається, коли $a=b=c$ або $A=B=C$ (що рівносильно), тобто коли трикутник рівносторонній.

Задача 2. Нехай r – радіус кола, вписаного в трикутник, ha, hb, hc – його висоти. Довести нерівність

$$r\le\frac{1}{9}(h_a+h_b+h_c).$$

Розв'язання

Виражаючи r і висоти через площу трикутника S і відповідні сторони, приходимо до рівносильної нерівності

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9. \qquad (2.6)$$

Співвідношення (2.6) випливає тепер із завдання 6. ∎

Завдання 9. Нехай p – півпериметр трикутника зі сторонами a, b, c і відповідними внутрішніми кутами A, B, C. Довести нерівності:

а) $\dfrac{a\cos A+b\cos B+c\cos C}{a+b+c}\leq\dfrac{1}{2}$, б) $p\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}\right)\geq\dfrac{9}{4}$.

§ 3. Перетворення Абеля і нерівності

У двох попередніх параграфах ми різними способами оцінювали суми виду $a_1b_1+\ldots+a_nb_n$. Для таких оцінок можна також застосовувати так зване *перетворення Абеля*. Нільс Генрік Абель (1802–1829) – видатний норвезький математик. Він довів нерозв'язність у радикалах загального алгебраїчного рівняння п'ятого степеня. Його ім'ям названо низку теорем, що стосуються алгебри, теорії рядів, інтегрального числення.



Розглянемо два (необов'язково впорядковані) набори чисел: $\{a_k, 1\leq k\leq n\}$ і $\{b_k, 1\leq k\leq n\}$. Позначимо

$$S_k=b_1+b_2+\ldots+b_k, \text{ якщо } 1\leq k\leq n.$$

***Лема* 1** (про перетворення Абеля). *Справедлива рівність*

$$a_1b_1+\ldots+a_nb_n=S_1(a_1-a_2)+S_2(a_2-a_3)+\ldots+S_{n-1}(a_{n-1}-a_n)+S_na_n. \qquad (3.1)$$

Доведення

Користуючись рівністю $b_k=S_k-S_{k-1}$, перетворимо суму:

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_{n-1}b_{n-1}+a_nb_n=$$

$$=a_1S_1+a_2(S_2-S_1)+a_3(S_3-S_2)+\ldots+a_{n-1}(S_{n-1}-S_{n-2})+a_n(S_n-S_{n-1})=$$

$$=S_1(a_1-a_2)+S_2(a_2-a_3)+\ldots+S_{n-1}(a_{n-1}-a_n)+S_na_n. \blacksquare$$

Задача 1. Нехай $\{a_k, 1 \le k \le n\}$ — упорядкований за спаданням набір додатних чисел. Довести нерівність

$$\left|a_1 \sin 1 + a_2 \sin 2 + \ldots + a_n \sin n\right| < \frac{\pi}{\sqrt{2}} a_1 .$$

Розв'язання

Покладемо $b_k = \sin k$, $S_k = \sin 1 + \ldots + \sin k$, $1 \le k \le n$, $M = \max\limits_{1 \le k \le n} |S_k|$. За лемою 1 маємо

$$A_n = \left|a_1 \sin 1 + a_2 \sin 2 + \ldots + a_n \sin n\right| \le$$

$$\le (a_1 - a_2)|S_1| + (a_2 - a_3)|S_2| + \ldots + (a_{n-1} - a_n)|S_{n-1}| + a_n |S_n| \le$$

$$\le M(a_1 - a_2 + a_2 - a_3 + \ldots + a_{n-1} - a_n + a_n) = Ma_1 . \qquad (3.2)$$

Оцінимо S_k. Помноживши цю суму на $2\sin\frac{1}{2}$, одержуємо

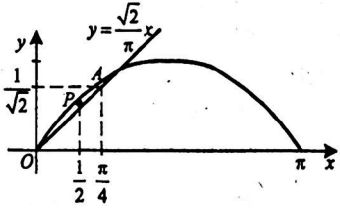
$$2S_k \sin\frac{1}{2} = 2\sin\frac{1}{2}(\sin 1 + \sin 2 + \ldots + \sin k) =$$

$$= \left(\cos\frac{1}{2} - \cos\frac{3}{2}\right) + \left(\cos\frac{3}{2} - \cos\frac{5}{2}\right) + \ldots + \left(\cos\left(k - \frac{1}{2}\right) - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)\right) =$$

$$= \cos\frac{1}{2} - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right).$$

Звідси $|S_k| \le \dfrac{1}{\sin\frac{1}{2}}$.

Нехай A, P — точки на синусоїді з абсцисами відповідно $\frac{\pi}{4}$, $\frac{1}{2}$ (мал. 2). Оскільки $\frac{1}{2} < \frac{\pi}{4}$, точка P лежить на дузі OA синусоїди.



Мал. 2

Відомо, що ця дуга лежить вище від січної OA (і це видно з малюнка 2), тому кутовий коефіцієнт прямої OP більший за кутовий коефіцієнт прямої OA, тобто

$$\frac{\sin\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} > \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}};\ \sin\frac{1}{2} > \frac{\sqrt{2}}{\pi}.$$

Отже, $M < \frac{\pi}{\sqrt{2}}$. Із нерівностей (3.2) одержуємо шукане співвідношення. ∎

Завдання 1. Нехай $\{a_k, 1 \le k \le n\}$ – упорядкований за спаданням набір дійсних чисел. Довести нерівність

$$|a_1 \cos 1 + a_2 \cos 2 + \ldots + a_n \cos n| \le \frac{\pi}{\sqrt{2}}(|a_1| + 2|a_n|).$$

Завдання 2. Нехай $\{a_k, 1 \le k \le n\}$ – упорядкований за спаданням набір додатних чисел. Довести нерівності:

а) $0 \le a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n \le a_1$,

б) $\left|a_1 - a_2 - a_3 + a_4 + a_5 - a_6 + \ldots + (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n\right| \le a_1$,

в) $\left|-a_1 - a_2 - a_3 + a_4 + a_5 + \ldots + (-1)^{[\sqrt{n}]} a_n\right| < \left([\sqrt{n}] + 2\right)a_1$, де $[x]$ – ціла частина x.

Вказівка. До останньої нерівності застосуйте перетворення Абеля й оцініть суму $(-1)^{[\sqrt{1}]} + \ldots + (-1)^{[\sqrt{k}]}$, якщо $k = m^2 - 1$, $m \in \mathbf{N}$.

Задача 2. Нехай $\{a_k, 1 \le k \le n\}$ – упорядкований за спаданням набір додатних чисел; $\{b_k, 1 \le k \le n\}$ – довільний числовий набір такий, що для деякого c при кожному $1 \le k \le n$ виконується нерівність $\frac{b_1 + \ldots + b_k}{k} \le c$. Довести нерівність $a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n \le c(a_1 + \ldots + a_n)$.

Розв'язання

Введемо набір середніх арифметичних:

$$B_k = \frac{b_1 + \ldots + b_k}{k},\ 1 \le k \le n.$$

За лемою 1 маємо:

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n \le$$

$$\le B_1(a_1-a_2)+2B_2(a_2-a_3)+\ldots+(n-1)B_{n-1}(a_{n-1}-a_n)+nB_na_n \le$$

$$\le c\big((a_1-a_2)+2(a_2-a_3)+\ldots+(n-1)(a_{n-1}-a_n)+na_n\big).$$

Застосовуючи рівність (3.1) справа наліво, покладаючи в ній $b_k=1$, $S_k=k$, $1\le k\le n$, продовжимо оцінку:

$$a_1b_1+\ldots+a_nb_n \le c(a_1+\ldots+a_n).$$

Завдання 3. Нехай виконано умови задачі 2. Довести нерівність

$$a_1b_1+\ldots+a_nb_n \ge d(a_1+\ldots+a_n),$$

де число d при кожному $1\le k\le n$ задовольняє нерівність

$$d \le \frac{b_1+\ldots+b_k}{k}.$$

Завдання 4. Нехай $\{a_k, 1\le k\le n\}$ — упорядкований за спаданням набір додатних чисел. Довести, що

$$-a_1+2a_2-3a_3+\ldots+(-1)^n na_n \le \frac{1}{2}(a_1+\ldots+a_n).$$

§ 4. Виділення впорядкованого набору

Від нерівностей перейдемо до наступної цікавої задачі: якої довжини повинен бути набір, щоб із нього завжди можна було вибрати впорядкований набір заданої довжини?

Дамо спочатку точне означення вкладених наборів.

Означення 1. *Нехай $\{a_k, 1\le k\le n\}$ — довільний (не обов'язково впорядкований за зростанням чи спаданням) набір, а $k(1)<k(2)<\ldots<k(m)\le n$ — деякий упорядкований за зростанням набір номерів довжини m. Набір $a_{k(1)}, a_{k(2)}, \ldots, a_{k(m)}$ називається вкладеним у початковий набір.*

Говорять також, що набір $\{a_{k(i)}, 1\le i\le m\}$ міститься в наборі $\{a_k, 1\le k\le n\}$.

Наприклад, набір 1, 3, 5, 7, 9 містить набір 1, 5, 7 і не містить набору 1, 9, 5, 7.

***Теорема* 1.** *Нехай n – довільне натуральне число, $\{a_k, 1 \le k \le n^2+1\}$ – деякий набір довжини n^2+1. Тоді існує впорядкований набір довжини $n+1$, вкладений у початковий набір.*

Перед тим як доводити теорему, виконаємо таку процедуру. Кожному з чисел a_k поставимо у відповідність числа $d_1(k)$ і $d_2(k)$, де $d_1(k)$ – максимальна довжина впорядкованого за зростанням набору, який починається з елемента a_k і вкладений у початковий набір; $d_2(k)$ означається аналогічно для впорядкованих за спаданням наборів. Наприклад, для набору

$$1, 5, 2, 7, 9, 3 \qquad (4.1)$$

$d_1(1)=4$ – довжина набору 1, 5, 7, 9; $d_2(1)=1$ – довжина набору, що складається з єдиного числа 1; $d_1(3)=3$ – довжина набору 2, 7, 9; $d_2(2)=2$ – довжина набору 5, 2 або 5, 3.

Завдання 1. Для набору (4.1) визначити всі інші показники: $d_i(k)$, $i=1, 2$, $1 \le k \le 6$.

Перед доведенням теореми 1 розглянемо допоміжне твердження.

***Лема* 1.** *Якщо $p \ne l$, то або $d_1(p) \ne d_1(l)$, або $d_2(p) \ne d_2(l)$.*

Доведення

Доведення проведемо методом від супротивного. Припустимо, що при деяких $p < l$ $d_1(p)=d_1(l)$ і $d_2(p)=d_2(l)$. Нехай спочатку $a_p \le a_l$. За означенням числа $d_1(l)$ існує впорядкований набір

$$a_l \le a_{k(2)} \le a_{k(3)} \le .... \le a_{k(m)}, \text{ де } m=d_1(l).$$

Тоді набір довжини $d_1(l)+1$

$$a_p \le a_l \le a_{k(2)} \le a_{k(3)} \le .... \le a_{k(m)}$$

починається з a_p і впорядкований за зростанням. Це суперечить означенню показника $d_1(p)$. Отже, припущення було хибним.

У випадку $a_p > a_l$ аналогічно отримуємо суперечність з означенням показника $d_2(p)$ і знову доходимо висновку про хибність припущення. ∎

Доведення теореми 1

Припустимо супротивне: нехай усі вкладені впорядковані набори мають довжину, не більшу за n. Тоді для кожного $k = 1,...,n^2+1$

$$1 \le d_1(k) \le n,\ 1 \le d_2(k) \le n.$$

Згідно з лемою 1, коли $p \ne l$, то пари $(d_1(p), d_2(p))$ і $(d_1(l), d_2(l))$ різні, тобто або $d_1(p) \ne d_1(l)$, або $d_2(p) \ne d_2(l)$. З урахуванням обмежень на $d_i(k)$, $i = 1, 2$, існує не більше, ніж $n \times n = n^2$ таких різних пар. У той самий час чисел a_k більше, а саме, їх n^2+1. За принципом Діріхле, обов'язково знайдуться такі різні номери p, l, що $d_1(p) = d_1(l)$ і $d_2(p) = d_2(l)$. Згідно з лемою 1 це неможливо. Отже, припущення було хибним. Теорему доведено. ∎

Примітка. Принцип Діріхле полягає в наступному. Нехай у k клітках сидять $(k+1)$ кроликів, тоді хоча б в одній клітці сидять кілька кроликів (докладніше див.: *Ядренко М. Й.* Принцип Діріхле. – К., 1986. – С. 80).

Виникає запитання: чи не можна в теоремі 1 зменшити довжину початкового набору? Розглянемо такий набір довжини n^2:

$$n, n-1, n-2,..., 1;\ 2n, 2n-1, 2n-2,..., n+1;$$

$$3n, 3n-1, 3n-2,..., 2n+1;\ ...;\ n^2, n^2-1, n^2-2,..., n^2-n+1.$$

Числа в цьому наборі начебто рухаються вниз сходами, що ведуть нагору. Перевірте самостійно, що будь-який упорядкований набір, який міститься в даному, має довжину, не більшу за n.

Завдання 2. Довести, що наступний набір довжини n^2 також не містить упорядкованих наборів довжини $n+1$:

$$n, 2n, 3n,..., n^2;\ n-1, 2n-1, 3n-1,..., n^2-1;$$

$$n-2, 2n-2, 3n-2,..., n^2-2;...;\ 1, n+1, 2n+1,..., (n-1)n+1.$$

Завдання 3. Нехай m, n – натуральні числа. Довести, що довільний набір довжини $mn+1$ або вміщує впорядкований за зростанням набір довжини $m+1$, або вміщує впорядкований за спаданням набір довжини $n+1$. Чи можна в цьому твердженні зменшити довжину початкового набору?

РОЗДІЛ ІІ. МОНОТОННІ ПОСЛІДОВНОСТІ

§ 1. Приклади

Нагадаємо, що *послідовністю* є відображення, яке кожному натуральному числу n ставить у відповідність деяке дійсне число a_n. Позначається послідовність так: $\{a_n, n \geq 1\}$, або коротше: $\{a_n\}$. Нумерація членів послідовності може починатися з довільного номера n_0; такі нескінченні набори чисел позначають $\{a_n, n \geq n_0\}$.

Будь-яку послідовність можна подати як нескінченний набір занумерованих чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

Якщо ці числа упорядковані за величиною, тобто більшим номерам відповідають більші (менші) числа, то така послідовність називається *монотонною*.

Дамо точні означення.

Означення 1. *Послідовність $\{a_n\}$ називається зростаючою, якщо $a_{n+1} > a_n$ для кожного $n \in \mathbf{N}$, і називається спадною, якщо $a_{n+1} < a_n$ для кожного $n \in \mathbf{N}$.*

Означення 2. *Послідовність $\{a_n\}$ називається неспадною, якщо $a_{n+1} \geq a_n$ для всіх $n \in \mathbf{N}$, і називається незростаючою, якщо $a_{n+1} \leq a_n$ для всіх $n \in \mathbf{N}$.*

Означення 3. *Послідовність $\{a_n\}$ називається монотонною, якщо вона належить одному із зазначених вище чотирьох типів. Послідовність називається строго монотонною, якщо є або зростаючою, або спадною.*

Найпростішими прикладами монотонних послідовностей є арифметична прогресія, а також геометрична прогресія зі знаменником $q > 0$.

Завдання 1. Дослідити, у яких випадках арифметична та геометрична прогресії є зростаючими (спадними) послідовностями.

Завдання 2. Послідовність $\{a_n\}$ натуральних чисел зростає. Довести, що $a_n \geq n$ для кожного n.

Наведемо складніші приклади монотонних послідовностей.

Приклад 1. Нехай $a > 1$. Покладемо $a_n = n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$, $n \geq 1$.

Оцінимо відношення

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)\left(\sqrt[n+1]{a}-1\right)}{n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)}.$$

Позначимо $t_n = a^{\frac{1}{n(n+1)}}$. Маємо

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)\left(t_n^n-1\right)}{n\left(t_n^{n+1}-1\right)} = \frac{(n+1)\left(1+t_n+t_n^2+\ldots+t_n^{n-1}\right)}{n\left(1+t_n+t_n^2+\ldots+t_n^n\right)},$$

а тому нерівність $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ рівносильна такій нерівності:

$$(n+1)\left(1+t_n+t_n^2+\ldots+t_n^{n-1}\right) < n\left(1+t_n+t_n^2+\ldots+t_n^n\right),$$

або

$$1+t_n+t_n^2+\ldots+t_n^{n-1} < nt_n^n.$$

Остання нерівність правильна, оскільки $t_n > 1$ і $t_n^i < t_n^n$, $i < n$. Таким чином, послідовність $\{a_n\}$ спадна.

Приклад 2. Покладемо $a_n = n + \frac{\cos 2n}{\sqrt{3}}$, $n \geq 1$.

Оцінимо різницю

$$a_{n+1} - a_n = 1 + \frac{\cos 2(n+1) - \cos 2n}{\sqrt{3}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin 1 \sin(2n+1).$$

Оскільки $1 < \frac{\pi}{3}$, то $\sin 1 < \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Маємо

$$\left|\frac{2}{\sqrt{3}} \sin 1 \sin(2n+1)\right| \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \sin 1 < 1.$$

Тоді

$$a_{n+1} - a_n \geq 1 - \left|\frac{2}{\sqrt{3}} \sin 1 \sin(2n+1)\right| > 0.$$

Отже, послідовність $\{a_n\}$ зростає.

Приклад 3. Задамо послідовність рекурентним співвідношенням:

a_1 – довільне число, що задовольняє нерівність $1 < a_1 < 2$;

$$a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n + 2,\ n \geq 1. \qquad (1.1)$$

Доведемо спочатку, що для кожного $n \geq 1$

$$1 < a_n < 2. \qquad (1.2)$$

Скористаємося методом математичної індукції. Якщо $n = 1$, то нерівність виконується за умовою. Нехай вона справедлива для деякого номера $k \geq 1$. Тоді

$$a_{k+1} = a_k^2 - 2a_k + 2 = (a_k - 1)^2 + 1 < (2-1)^2 + 1 = 2.$$

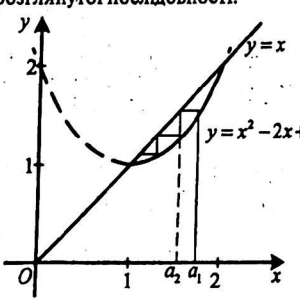
У той самий час, оскільки $a_k \neq 1$, то $a_{k+1} > 1$. Нерівність (1.2) доведено.

Перейдемо до дослідження монотонності заданої послідовності. Утворимо різницю

$$a_{n+1} - a_n = a_n^2 - 3a_n + 2 = (a_n - 1)(a_n - 2).$$

Зі співвідношення (1.2) випливає нерівність $a_{n+1} - a_n < 0$, $n \geq 1$. Отже, спадання послідовності $\{a_n\}$ доведено.

Цікаво, що всі наведені міркування допускають просту геометричну інтерпретацію. Скористайтеся малюнком 3 і графічно обґрунтуйте монотонність розглянутої послідовності.



Мал. 3

Приклад 4. У курсі геометрії монотонні послідовності виникають при означенні довжини кола. Нехай P_n' – периметр правильного

n-кутника, вписаного в коло радіуса R, P_n'' – периметр правильного n-кутника, описаного навколо цього кола. Тоді послідовність $\{P_{2^n}', n \geq 2\}$ зростає, а послідовність $\{P_{2^n}'', n \geq 2\}$ спадає (доведіть!).

Задача про відшукання найбільшого елемента послідовності часто зводиться до дослідження її на монотонність. Розглянемо спочатку невеличке узагальнення цього поняття.

Означення 4. *Послідовність $\{a_n\}$ називається зростаючою (спадною), починаючи з номера m, якщо послідовність $\{a_{n+m-1}, n \geq 1\}$ зростає (спадає).*

Іншими словами, послідовність $\{a_n\}$ зростає, починаючи з номера m, якщо виконуються нерівності: $a_m < a_{m+1} < a_{m+2} < \ldots$

Задача 1. Знайти найбільший член послідовності

$$a_n = \frac{2007^n}{n!}, \; n \geq 1.$$

Розв'язання

Як і в прикладі 1, складемо відношення двох сусідніх членів послідовності. Після очевидних спрощень маємо:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2007}{n+1}. \qquad (1.3)$$

Звідси випливає, що

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1, \text{ коли } n \leq 2005,$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1, \text{ коли } n \geq 2007,$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1, \text{ коли } n = 2006.$$

Таким чином, послідовність $\{a_n\}$ зростає до номера 2006 і, починаючи з наступного номера, спадає.

Найбільшими є два члени послідовності:

$$a_{2006} = a_{2007} = \frac{2007^{2006}}{2006!}.$$

Читач може запідозрити, що будь-яка послідовність є монотонною, починаючи з деякого номера. Наступний простий приклад показує, що це не так.

Приклад 5. Розглянемо геометричну прогресію

$$b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n,\ n \geq 1.$$

Оскільки в ній чергуються як додатні, так і від'ємні числа, то маємо при парному n

$$b_n > b_{n+1},\ b_{n+1} < b_{n+2}.$$

Тут n може бути як завгодно великим. Тому, з якого б номера ми не починали, послідовність $\{b_n\}$ не буде монотонною.

Завдання 3. Довести, що при $0 < a < 1$ послідовність із прикладу 1 спадає.

Завдання 4. Дослідити на монотонність послідовність із прикладу 3 з довільним a_1. Дати геометричну інтерпретацію.

Завдання 5. З'ясувати, для яких $a \in \mathbf{R}$ послідовність $a_n = \frac{a^n}{n!}$, $n \geq 1$ є монотонною.

Завдання 6. Дослідити на монотонність послідовность $\{2n^2 - 3n + 5, n \geq 1\}$.

Завдання 7. Нехай $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ – зростаючі послідовності додатних чисел. Чи є монотонними послідовності: $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n - b_n\}$, $\{a_n b_n\}$, $\{a_n^{b_n}\}$?

Завдання 8*. (Національна математична олімпіада США, 1980.) Знайти усі числа a_0, для яких нескінченна послідовність $\{a_n, n \geq 1\}$ визначена рівностями $a_n = 2^{n-1} - 3a_{n-1}$, $n \in \mathbf{N}$, зростає.

Вказівка. Доведіть спочатку, що загальний член послідовності має вигляд $a_n = \frac{2^n}{5} + (-3)^n \left(a_0 - \frac{1}{5}\right)$.

§ 2. Монотонні підпослідовності

Повернемося до прикладу 5 § 1. Послідовність $b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, $n \geq 1$, не є монотонною, однак з неї можна здобути монотонні послідов-

ності $b_{2k}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{2k}$, $k\ge 1$ і $b_{2k-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{2k-1}$, $k\ge 1$. Подібні «частини» послідовності $\{b_n\}$ називаються її *підпослідовностями*.

Означення 1. *Нехай $\{a_n\}$ – послідовність дійсних чисел, $\{n(k), k\ge 1\}$ – зростаюча послідовність натуральних чисел. Тоді послідовність $b_k=a_{n(k)}$, $k\ge 1$ називається підпослідовністю послідовності $\{a_n\}$.*

Так, у задачі 1 § 1 послідовність $\{a_n\}$ містить монотонну підпослідовність $a_{2007}, a_{2008}, a_{2009}, \ldots$

Її можна подати у вигляді $\{a_{n(k)}, k\ge 1\}$, де $n(k)=k+2006$.

Завдання 1. Перевірити, чи послідовності {3, 6, 9, ...} і $\{3, 3^3, 3^5, 3^7, \ldots\}$ є підпослідовностями послідовності натуральних чисел {1, 2, 3, 4, ...}. Чому дорівнює $n(k)$ у цьому випадку?

Завдання 2. Показати, що послідовність {2, 4, 3, 8, 16, 15, 32, 64, 63, ...} не є підпослідовністю послідовності {1, 2, 3, 4, ...}.

Усі розглянуті раніше послідовності або є монотонними, або містять монотонні підпослідовності. Простежимо цю закономірність на кількох прикладах.

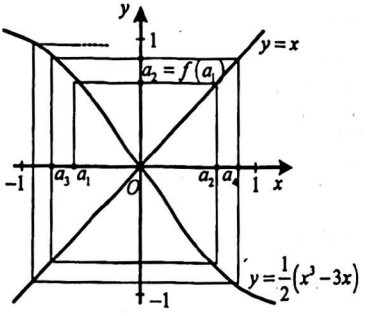
Приклад 1. Задамо послідовність рекурентним співвідношенням:

$$a_1 \text{ – довільне число з інтервалу } (-1; 0),$$

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n^3-3a_n\right),\ n\ge 1. \qquad (2.1)$$

Як і в прикладі 3 § 1, зобразимо поведінку цієї послідовності графічно. Введемо непарну функцію $f(x)=\frac{1}{2}\left(x^3-3x\right)$, $x\in(-1; 1)$. Схематично побудуємо її графік і на тому самому малюнку проведемо пряму $y=x$, що дає змогу зобразити кілька членів даної послідовності (мал. 4).

Малюнок підказує, що підпослідовність $\{a_{2k}\}$ зростає, а підпослідовність $\{a_{2k-1}\}$ спадає. Доведемо це.



Мал. 4

Оскільки область визначення $D(f)$ і область значень $E(f)$ є інтервалом $(-1;\ 1)$, то за індукцією легко дійти висновку, що $-1 < a_n < 1$, $n \geq 1$, причому $a_n \neq 0$.

Якщо $x \in (-1;\ 0)$, то $f(x) > 0$; якщо $x \in (0;\ 1)$, то $f(x) < 0$. Тому знаки членів послідовності $\{a_n\}$ чергуються: $a_{2k-1} < 0$, $a_{2k} > 0$, $k \geq 1$. Достатньо тепер показати, що послідовність $\{|a_n|,\ n \geq 1\}$ зростає.

Справді, оскільки члени a_n, a_{n+1} мають різні знаки і $|a_n| < 1$, у випадку $a_n > 0$ одержуємо

$$|a_{n+1}| - |a_n| = \frac{1}{2}\left(3a_n - a_n^3\right) - a_n = \frac{1}{2}a_n\left(1 - a_n^2\right) > 0.$$

Аналогічно, якщо $a_n < 0$, то

$$|a_{n+1}| - |a_n| = \frac{1}{2}\left(a_n^3 - 3a_n\right) + a_n = -\frac{1}{2}a_n\left(1 - a_n^2\right) > 0.$$

Отже, строгу монотонність обох підпослідовностей доведено.

Приклад 2. Покладемо

$$a_n = \begin{cases} 1, \text{ якщо } n = k^2,\ k \in \mathbf{N}, \\ 0 \text{ в інших випадках.} \end{cases}$$

Очевидно, що ця послідовність не є монотонною. Підпослідовності $\{a_{2n}\}$, $\{a_{2n-1}\}$, $\{a_{3n}\}$ також не є монотонними. Більше того, виявляється, що для довільного $p \in \mathbb{N}$ підпослідовність

$$\{b_k = a_{pk},\ k \geq 1\} \tag{2.2}$$

не є монотонною.

Доведемо це твердження методом від супротивного. Нехай для деякого $p \in \mathbb{N}$ підпослідовність (2.2) монотонна. Візьмемо довільне непарне число l. Тоді якщо $k = p^l$, то $pk = p^{l+1} = \left(p^{\frac{l+1}{2}}\right)^2$. Звідси $b_k = 1$. У той самий час, при такому самому k число $2pk = 2\left(p^{\frac{l+1}{2}}\right)^2$ не є повним квадратом, і отже, $b_k = 0$. Послідовність $\{b_k\}$ містить нескінченно багато нулів і одиниць і не може бути монотонною. Одержали суперечність з припущенням.

Монотонну підпослідовність усе-таки виділити можна, поклавши $n(k) = k^2$. Утім, не обов'язково для цього так сильно розріджувати початкову послідовність. Відомо, що повні квадрати не можуть давати остачу 3 при діленні на 4, і тому підпослідовність $\{a_{4k+3} = 0, k \geq 1\}$ також монотонна.

Як бачимо, наші спроби сконструювати послідовність, що не містить монотонної підпослідовності, не увінчалися успіхом. Причина в тому, що такої послідовності просто не існує.

Теорема 1. *Кожна послідовність містить монотонну підпослідовність.*

Доведення

Нехай $\{a_n\}$ – довільна послідовність. Починаючи з її першого члена, будемо конструювати неспадну підпослідовність. Покладемо $m_1(1) = 1$; $m_1(2)$ – найменший такий номер, що $m_1(2) > 1$, $a_{m_1(2)} \geq a_1$; $m_1(3)$ – найменший такий номер, що $m_1(3) > m_1(2)$, $a_{m_1(3)} \geq a_{m_1(2)}$ і т.д. Якщо зазначена процедура не обірветься, то так ми побудуємо шу-

кану підпослідовність $\left\{a_{m_1(k)},\ k \geq 1\right\}$. Якщо ж процедура обірветься, то одержимо скінченну неспадну послідовність із k_1 членів

$$a_{m_1(k)},\ 1 \leq k \leq k_1,$$

причому $a_{m_1(k_1)} \geq a_n$ при $n > m_1(k_1)$. (Зазначимо, що у випадку $k_1 = 1$ a_1 – найбільший член початкової послідовності.)

Покладемо далі $m_2(1) = m_1(k_1)+1$ і, починаючи з члена $a_{m_2(1)}$, побудуємо неспадну підпослідовність аналогічно до попереднього. Якщо процедура не обривається, то отримано шукану підпослідовність $\left\{a_{m_2(k)},\ k \geq 1\right\}$. У протилежному випадку маємо скінченну неспадну послідовність

$$a_{m_2(k)},\ 1 \leq k \leq k_2,$$

причому $a_{m_2(k_2)} > a_n$ при $n > m_2(k_2)$. Далі покладаємо $m_3(1) = m_2(k_2)+1$ і знову будуємо неспадну підпослідовність, починаючи з члена $a_{m_3(1)}$ і т.д. Є дві можливості:

1) на деякому p-му кроці буде побудовано нескінченну неспадну підпослідовність $\left\{a_{m_p(k)},\ k \geq 1\right\}$, яка і буде шуканою;

2) для кожного $p \geq 1$ побудовано скінченну послідовність $\left\{a_{m_p(k)},\ 1 \leq k \leq k_p\right\}$. Тоді покладемо $n(p) = m_p(k_p)$, $p \geq 1$, і покажемо, що підпослідовність $\left\{a_{n(p)},\ p \geq 1\right\}$ є шуканою.

Справді,

$$m_1(k_1) < m_2(1) \leq m_2(k_2) < m_3(1) \leq m_3(k_1) < \ldots,$$

і послідовність номерів $\left\{n(p) = m_p(k_p),\ p \geq 1\right\}$ зростає. Отже, $\left\{a_{n(p)}\right\}$ є підпослідовністю. Крім того, за побудовою маємо

$$a_{m_1(k_1)} > a_{m_2(k_2)} > a_{m_3(k_3)} > \ldots$$

Таким чином, $\left\{a_{n(p)}\right\}$ – спадна підпослідовність. ∎

Теорема 1 є цікавим фактом, який можна покласти в основу теорії границь. Її доведення нагадує доведення теореми 1 § 4 розділу I.

Завдання 3. Послідовність $\{a_n\}$ задано рекурентно: a_1 — фіксоване число з відрізка $[-1; 1]$; $a_{n+1} = -\operatorname{arctg} a_n$, $n \geq 1$. Чи монотонна ця послідовність? Чи монотонні підпослідовності $\{a_{2k}\}$, $\{a_{2k-1}\}$? Дати геометричне тлумачення.

Вказівка. Система вертикальних і горизонтальних відрізків на малюнку нагадуватиме павутинку.

Завдання 4*. Побудувати таку послідовність $\{a_n\}$, що жодна її підпослідовність виду $\{a_{pk+q},\ k \geq 1\}$, де $p \in \mathbf{N}$, $q \in \mathbf{N}$, не є монотонною.

Вказівка. Покладіть $a_n = 1$, якщо $(2k)^2 \leq n < (2k+1)^2$, і $a_n = 0$, якщо $(2k-1)^2 \leq n < (2k)^2$, де $k \in \mathbf{N}$.

Завдання 5. Використовуючи процедуру з доведення теореми 1, виділити монотонну підпослідовність з послідовності {1, 2, −1, 0, −3, −2, ..., −2k − 1, −2k, ...}.

Завдання 6. Чи містить послідовність із задачі 1 § 1 зростаючу підпослідовність?

Завдання 7*. Виділити зростаючу і спадну підпослідовності з послідовності дробових частин $\{\{\lg n\}, n \geq 1\}$.

Вказівка. Розгляньте підпослідовності з $n(k) = 10^k \pm 1$.

§ 3. Границя послідовності

Означення 1. *Дійсне число p називається границею послідовності* $\{a_n\}$, *якщо для довільного додатного* ε *існує таке дійсне число N, що для всіх номерів* $n \geq N$ *виконується нерівність* $|a_n - p| < \varepsilon$.

Це позначається так:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = p \text{ або } a_n \to p,\ n \to \infty.$$

Зауваження 1. Якщо послідовність $\{a_n\}$ задовольняє означення 1, то кажуть, що $\{a_n\}$ *збігається* до *p*. Якщо існує таке $p \in \mathbf{R}$, що $\{a_n\}$

збігається до p, то ця послідовність називається *збіжною*. Якщо ж такого дійсного p не існує, то вона називається *розбіжною*.

Означення 2. *Нехай* $\delta > 0$. *Назвемо* δ *-околом числа* p *проміжок*

$$(p-\delta;\ p+\delta).$$

Завдання 1. Знайти перетин δ -околів чисел $p_1 = 0$ і $p_2 = 1$, якщо $\delta = 0{,}75$.

Збіжність $a_n \to p,\ n \to \infty$ означає, що для довільного ε -околу числа p усі члени послідовності $\{a_n\}$ потрапляють у цей окіл, починаючи з деякого номера $n_0 = n_0(\varepsilon)$. Цей номер, взагалі кажучи, залежить від ε.

Завдання 2. Нехай $c \in \mathbf{R}$, $\{a_n\}$ – така послідовність, що $a_n = c$ для всіх n, починаючи з деякого номера n_0. Довести, що $a_n \to c,\ n \to \infty$.

Приклад 1. Розглянемо послідовність

$$a_n = \frac{1}{n},\ n \geq 1.$$

При дуже великих n число a_n стає дуже малим. Наприклад, якщо $n = 1000$ $a_n = 0{,}001$. Тому не дивно, що

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \qquad (3.1)$$

Доведемо це, виходячи з означення 1. Нехай $\varepsilon > 0$ задано. Потрібно побудувати таке дійсне число N, щоб з нерівності $n \geq N$ випливало співвідношення $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$.

Остання нерівність рівносильна такій: $n > \frac{1}{\varepsilon}$. За N можна взяти число $\frac{1}{\varepsilon} + 1$. Тоді при $n \geq \frac{1}{\varepsilon} + 1$ матимемо $n > \frac{1}{\varepsilon}$, звідки $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Таким чином, коли $N = \frac{1}{\varepsilon} + 1$, справді з $n \geq N$ випливає $\frac{1}{n} < \varepsilon$. За означенням границі, ми довели рівність (3.1).

Завдання 3. Нехай $\alpha > 0$. Виходячи з означення границі, довести, що $\frac{1}{n^{\alpha}} \to 0$, $n \to \infty$. Довести також, що $\frac{1}{2^n} \to 0$, $n \to \infty$.

Приклад 2. (Перший спосіб.) Нехай

$$b_n = \frac{n}{2n + \sqrt[3]{n} - 2}, \quad n \geq 1.$$

Вгадаємо границю. При великих n число $2n$ значно більше за число $\sqrt[3]{n} - 2$. Наприклад, якщо $n = 1000$, то $2n = 2000$, $\sqrt[3]{n} - 2 = 8$. Тому при великих n маємо наближену рівність $b_n \approx \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$.

Доведемо, що

$$\lim_{n \to \infty} b_n = \frac{1}{2}. \qquad (3.2)$$

Спочатку перетворимо різницю

$$b_n - \frac{1}{2} = \frac{2 - \sqrt[3]{n}}{2\left(2n + \sqrt[3]{n} - 2\right)}.$$

Нехай $\varepsilon > 0$ задано. Шукаємо таке дійсне N, щоб:

$$n \geq N \Rightarrow \left| \frac{2 - \sqrt[3]{n}}{2\left(2n + \sqrt[3]{n} - 2\right)} \right| < \varepsilon. \qquad (3.3)$$

Зазначимо, що $2 - \sqrt[3]{n} = 0 \Leftrightarrow n = 8$. При $n \geq 8$ виконується нерівність $\sqrt[3]{n} - 2 \geq 0$. Накладемо на N обмеження

$$N \geq 8. \qquad (3.4)$$

Тоді при $n \geq N$ виконується нерівність $n \geq 8$, і нерівність у виразі (3.3) матиме вигляд:

$$\frac{\sqrt[3]{n} - 2}{2\left(2n + \sqrt[3]{n} - 2\right)} < \varepsilon. \qquad (3.5)$$

Не варто розв'язувати цю нерівність відносно n. Замість цього оцінимо її ліву частину (при $n \geq 8$):

$$\frac{\sqrt[3]{n} - 2}{2\left(2n + \sqrt[3]{n} - 2\right)} < \frac{\sqrt[3]{n}}{2\left(2n + \sqrt[3]{n} - 2\right)} \leq \frac{\sqrt[3]{n}}{4n} = \frac{1}{4n^{\frac{2}{3}}}.$$

Для виконання (3.5) достатньо забезпечити, щоб виконувалася нерівність

$$\frac{1}{4n^{\frac{2}{3}}} < \varepsilon, \text{ або } n > \left(\frac{1}{4\varepsilon}\right)^{\frac{3}{2}}. \qquad (3.6)$$

Якщо

$$N \geq \left(\frac{1}{4\varepsilon}\right)^{\frac{3}{2}} + 1, \qquad (3.7)$$

то з нерівності $n \geq N$ випливатиме (3.6). Отже, маємо два обмеження на N: нерівності (3.4), (3.7). Остаточно можна покласти

$$N = \max\left\{8, \left(\frac{1}{4\varepsilon}\right)^{\frac{3}{2}} + 1\right\}.$$

Тут $\max\{A, B\}$ позначає найбільше з чисел A, B. Тоді при всіх $n \geq N$ виконується $n \geq 8$, $n > \left(\frac{1}{4\varepsilon}\right)^{\frac{3}{2}}$, звідки випливає умова (3.5).

Шукане N побудоване, і рівність (3.2) доведено.

Завдання 4. Виходячи з означення границі, довести, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-2006}{2007n+1} = \frac{1}{2007}.$$

Приклад 3. Нехай

$$c_n = (-1)^n, \; n \geq 1. \qquad (3.8)$$

Ця послідовність розбивається на дві підпослідовності

$$c_{2k} = 1, \; c_{2k-1} = -1; \; k \geq 1.$$

Члени послідовності (3.8) набувають лише двох значень: 1 і -1.

Доведемо, що послідовність (3.8) розбігається, тобто не збігається до жодного дійсного числа.

Доводити будемо від супротивного. Припустимо, що знайдеться таке $p \in \mathbf{R}$, що

$$\lim_{n\to\infty} c_n = p.$$

Покладемо $\varepsilon = 1$. Тоді існує таке N, що з нерівності $n \geq N$ випливає нерівність $|c_n - p| < 1$. Узявши тут парне n, матимемо $|1-p|<1$, а при непарному n отримуємо $|-1-p|<1$. Але останні дві нерівності несумісні, бо з першої випливає $p>0$, а з другої $p<0$. Отримали суперечність з нашим припущенням. Отже, послідовність $\{c_n\}$ розбіжна.

Завдання 5. Виходячи з означення границі, довести розбіжність послідовності $\left\{\frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2},\ n \geq 1\right\}$.

Наступне твердження описує найпростіші властивості границь.

Теорема 1. *Нехай* $a_n \to a$, $b_n \to b$, *якщо* $n \to \infty$. *Тоді:*

а) *при кожному дійсному* c: $\lim\limits_{n\to\infty}(ca_n) = c\lim\limits_{n\to\infty} a_n$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

г) *за умови* $b \neq 0$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

Теорема 1 є корисною для обчислення границь.

Приклад 2. (Другий спосіб.) Перетворимо загальний член послідовності з прикладу 2:

$$b_n = \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} - \frac{2}{n}}. \qquad (3.9)$$

Границя чисельника дорівнює 1 згідно із завданням 2. Розглянемо границю знаменника, користуючись твердженнями а), б):

$$\lim_{n\to\infty}\left(2 + \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} - \frac{2}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 2 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} + \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{2}{n}\right) =$$

$$= 2 + 0 + (-2)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 2 + (-2)\cdot 0 = 2.$$

Ми використали завдання 2 (границя сталої послідовності), приклад 1 і завдання 3 для показника степеня $\alpha = \frac{2}{3}$. Отже, границя знаменника дробу (3.9) відмінна від 0. Далі, за твердженням г),

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2 + \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}} - \frac{2}{n}\right)} = \frac{1}{2}.$$

Завдання 6. Нехай $p(x)$ – многочлен степеня $r \geq 0$ зі старшим коефіцієнтом a_0, $q(x)$ – многочлен степеня $s \geq 0$ зі старшим коефіцієнтом b_0 ($a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$). Покладемо при $n \in N$

$$y_n = \begin{cases} \dfrac{p(n)}{q(n)}, & \text{якщо } q(n) \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } q(n) = 0. \end{cases}$$

Довести, що $\{y_n\}$ збігається тоді і тільки тоді, коли $r \leq s$, і знайти границю.

Зауваження 2. Нехай $r > s$. Якщо числа a_0, b_0 однакового знака, то y_n стає як завгодно великим для досить великих n. У такому разі кажуть, що $\{y_n\}$ прямує до $(+\infty)$ і записують $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$. Якщо ж числа a_0, b_0 різних знаків, то y_n стає від'ємним при великих n, причому $|y_n|$ стає як завгодно великим при досить великих n. Тоді кажуть, що $\{y_n\}$ прямує до $(-\infty)$, і записують $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$. В обох цих випадках $\{y_n\}$ є розбіжною послідовністю, кажуть: $\{y_n\}$ розбігається до $(+\infty)$ або розбігається до $(-\infty)$. Наприклад,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + 3n}{n^2 + 4} = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 2}{-n - 1} = -\infty.$$

§ 4. Теорема Вейєрштрасса

Чи завжди монотонна послідовність збігається? Щоб відповісти на це запитання, введемо поняття обмеженої послідовності.

Означення 1. *Послідовність* $\{a_n\}$ *називається обмеженою зверху (знизу), якщо знайдеться таке число* c, *що для всіх* $n \geq 1$

$$a_n \leq c \ (a_n \geq c).$$

Послідовність називається обмеженою, якщо вона обмежена і зверху, і знизу.

Звернімося до прикладів з § 1. Послідовності $\{a_n\}$ з прикладів 1–4 обмежені знизу, оскільки задовольняють нерівності $a_n \geq 0$, $n \geq 1$. Послідовність $\{a_n\}$ з прикладу 3 задовольняє нерівності $a_n \leq 2$, $n \geq 1$, вона обмежена також і зверху, а отже, обмежена. Послідовність $a_n = \frac{2007^n}{n!}$ із задачі 1 § 1 є обмеженою, оскільки $0 \leq a_n \leq a_{2006}$, $n \geq 1$. Для послідовності $b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ з прикладу 5 маємо $-\frac{1}{2} \leq b_n \leq \frac{1}{2}$, $n \geq 1$, і тому вона також обмежена. Нарешті, послідовність $a_n = n + \frac{\cos 2n}{\sqrt{3}}$ не обмежена зверху, оскільки $a_n \geq n - 1$, $n \geq 1$, а величина $n - 1$ може набувати як завгодно великих значень.

Завдання 1. Послідовність $\{a_n\}$ обмежена тоді і тільки тоді, коли знайдеться таке число $c > 0$, що $|a_n| \leq c$ при всіх $n \geq 1$. Довести.

Завдання 2. Сформулювати без заперечень означення необмеженої послідовності.

Завдання 3. Навести приклад послідовності, не обмеженої знизу.

Завдання 4. Нехай $l \in \mathbf{N}$. Якщо підпослідовність $\{a_{k+l},\ k \geq 1\}$ обмежена, то і послідовність $\{a_n,\ n \geq l\}$ обмежена. Довести.

Завдання 5. У яких випадках є обмеженою арифметична прогресія? геометрична прогресія?

Завдання 6. Послідовність $\{a_n\}$ обмежена зверху тоді і тільки тоді, коли $\{-a_n\}$ обмежена знизу. Довести.

Завдання 7. Нехай $\{a_n\}$ – довільна послідовність. У яких випадках обмежені послідовності

$$b_n = \frac{a_n}{\sqrt{|a_n|+1}},\ c_n = \frac{a_n}{\sqrt[3]{a_n^4+0{,}001}},\ n \ge 1?$$

Завдання 8. Чи обмежені послідовності

$$\{(-1)^n n\},\ \left\{\frac{1000n}{0{,}001n+1}\right\},\ \left\{\frac{n!}{10^{50n}}\right\}?$$

Завдання 9. Чи обмежена послідовність $\{n\cos n\}$?

Вказівка. Побудуйте зростаючу послідовність номерів $\{n_k\}$ таку, що $\cos n_k \ge \frac{1}{2}$, $k \ge 1$.

Теорема 1. *Кожна неспадна послідовність обмежена знизу.*

Доведення

Нехай послідовність $\{a_n\}$ не спадає. Тоді для кожного $n \ge 1$ $a_n \ge a_1$. Покладаючи в означенні $c = a_1$, одержуємо обмеженість знизу послідовності $\{a_n\}$. ◆

Аналогічне твердження правильне для незростаючої послідовності (сформулюйте і доведіть). Зокрема, послідовність $\{a_n\}$ з прикладу 1 § 1 спадає і обмежена зверху.

Наступний фундаментальний результат ми наведемо без доведення.

Теорема 2. *Кожна монотонна й обмежена послідовність збігається.*



Цю теорему називають теоремою Вейерштрасса за ім'ям видатного німецького математика Карла Теодора Вільгельма Вейєрштрасса (1815–1897), автора глибоких ідей у математичному аналізі, варіаційному численні, алгебрі, диференціальній геометрії.

Зокрема, мають скінченні границі послідовності з прикладів 1, 3 § 1. Розглянемо кілька важливих наслідків з теореми 2.

Наслідок 1. *Якщо послідовність не спадає (не зростає) і обмежена зверху (знизу), то вона збігається.*

Доведення

Нехай $\{a_n\}$ не спадає й обмежена зверху. Тоді за теоремою 1 вона також обмежена знизу і, отже, обмежена. З теореми 2 випливає її збіжність. Аналогічні міркування для незростаючої послідовності.

Наслідок 1 дає змогу перевіряти обмеженість конкретних монотонних послідовностей лише або зверху, або знизу. ◆

Наслідок 2. *Якщо послідовність не спадає (не зростає), починаючи з деякого номера, і обмежена зверху (знизу), то вона збігається.*

Доведення

Знову обмежимося лише неспадними послідовностями. Нехай $\{a_n\}$ обмежена зверху і не спадає, починаючи з номера m. Тоді послідовність $\{a_{k+m-1},\ k \geq 1\}$ не спадає й обмежена зверху. Згідно з наслідком 1 вона збігається до деякого числа a, тобто для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке число $M(\varepsilon)$, що для всіх номерів $k \geq M(\varepsilon)$ виконується нерівність $|a_{k+m-1} - a| < \varepsilon$.

Відзначимо, що умова $k \geq M(\varepsilon)$ рівносильна нерівності $n = k + m - 1 \geq M(\varepsilon) + m - 1$. Покладемо для кожного $\varepsilon > 0$ $N(\varepsilon) = M(\varepsilon) + m - 1$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ і всіх номерів $n \geq N(\varepsilon)$ виконується нерівність $|a_n - a| < \varepsilon$, що і означає збіжність $\{a_n\}$ до числа a. ◆

Теорема 2 та її наслідки застосовуються для доведення збіжності конкретних послідовностей. Якщо при цьому можна вивести рекурентне співвідношення, то обчислення границі вже не становить труднощів. Нижче без додаткових пояснень будемо користуватися елементарними властивостями границь, поданими в теоремі 1 § 3.

Приклад 1. Нехай $\{a_n\}$ – послідовність із задачі 1 § 1. Вище було показано її обмеженість і спадання, починаючи з номера 2007. За наслідком 2 $\{a_n\}$ збігається до деякого числа a. Знайдемо його. Відповідно до рівності (1.3)

$$a_{n+1} = 2007 a_n \frac{1}{n+1},\ n \geq 1.$$

Спрямуємо в цій рівності n до нескінченності. Маємо:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = 2007 \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 2007 a \cdot 0 = 0.$$

Отже, $a_n \to 0$, $n \to \infty$.

Приклад 2. Нехай $\{a_n\}$ – послідовність із прикладу 3 § 1, збіжність якої було доведено вище. Позначимо через a її границю. У рівності (1.1) спрямуємо n до нескінченності. За властивостями границі одержимо рівняння відносно a:

$$a = a^2 - 2a + 2.$$

Маємо $a_1 = 1$ і $a_2 = 2$.

Яке з цих чисел є границею? Згадаємо, що $\{a_n\}$ спадає, і тому $a_n \le a_1$, $n \ge 1$. Звідси

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \le a_1 < 2.$$

Тоді $a = 1$. До речі, це узгоджується з мал. 3 § 1.

Приклад 3. Нехай $\{a_n\}$ – послідовність із прикладу 1 § 2. Вона задана співвідношеннями $a_1 \in (-1; 0)$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n^2 - 3a_n\right)$, $n \ge 1$. Розглянемо спочатку підпослідовність $\{a_{2k}\}$. У § 2 доведено, що вона зростає, причому $0 < a_{2k} < 1$, $k \ge 1$. За теоремою 2 вона збігається до деякої границі x. З нерівності $a_2 \le a_{2k} < 1$, $k \ge 1$, за властивостями границі одержуємо, що $0 < a_2 \le x \le 1$, звідки $0 < x \le 1$. Аналогічно $\{a_{2k-1}\}$ збігається до деякої границі $y \in [-1; 0)$.

Доведемо спочатку, що $y = -x$. У §2 доводилися монотонність послідовності $\{|a_n|\}$ і нерівність $|a_n| \le 1$, $n \ge 1$. За теоремою 2 ця послідовність збігається до деякого числа z. Відповідно до властивостей границі маємо

$$x = \lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} |a_{2k}| = z,$$

$$y = \lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} \left(-|a_{2k-1}|\right) = -z.$$

Звідси і випливає рівність $y = -x$.

Перейдемо до границі в рекурентному співвідношенні (2.1). Покладемо в ньому $n = 2k - 1$, $k \in \mathbf{N}$, і спрямуємо k до нескінченності. Одержимо

$$x = \lim_{k\to\infty} a_{2k} = \frac{1}{2}\left(\lim_{k\to\infty} a_{2k-1}^3 - 3\lim_{k\to\infty} a_{2k-1}\right) = \frac{1}{2}\left(y^3 - 3y\right).$$

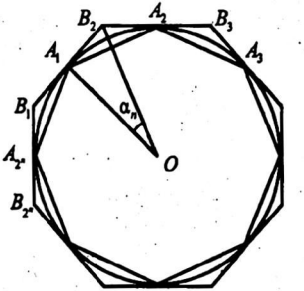
Підставляючи $y = -x$, приходимо до рівняння

$$\frac{1}{2}\left(x^3 - 3x\right) + x = 0; \; x_1 = 0, \; x_2 = -1, \; x_3 = 1.$$

Оскільки $x > 0$, знаходимо шукані значення $x = 1$, $y = -1$. Виходячи з означення границі, можна зробити висновок, що початкова послідовність розбігається.

Приклад 4. Нехай P_n' – периметр правильного n-кутника, вписаного в коло радіуса R, а P_n'' – периметр правильного n-кутника, описаного навколо цього кола. Послідовність $\{P_{2^n}', n \geq 2\}$ зростає, а послідовність $\{P_{2^n}'', n \geq 2\}$ спадає. Покажемо, як за допомогою цих двох послідовностей можна означити довжину кола. Міркування проведемо в кілька етапів.

а) *Обмеженість.* Занумеруємо вершини вписаних і описаних $2n$-кутників так, як показано на малюнку 5.



Мал. 5

За властивостями трикутника

$$B_1B_2 = A_1B_2 + B_2A_2 > A_1A_2.$$

Отже, $P_{2^n}' < P_{2^n}''$. Скориставшись монотонністю, одержимо

$$P_4' \leq P_{2^n}' < P_{2^n}'' \leq P_4'', \; n \geq 2,$$

звідки й випливає обмеженість обох послідовностей.

б) *Збіжність.* За теоремою 2 послідовності $\{P_{2^n}'\}$ і $\{P_{2^n}''\}$ збігаються. Підкреслюючи залежність границь від радіуса R, позначимо їх відповідно $l(R)$ і $L(R)$.

в) *Рівність границь.* Нехай $\alpha_n = \angle A_1OB_2$. Утворимо різницю

$$P'_{2^n} - P'_{2^{n-1}} = 2^n R(2\operatorname{tg}\alpha_n - 2\sin\alpha_n) =$$

$$= \frac{2^{n+1} R \sin\alpha_n (1-\cos\alpha_n)}{\cos\alpha_n} = \frac{2^{n+2} R \sin\alpha_n \sin^2 \alpha_{n+1}}{\cos\alpha_n}.$$

Оскільки $P'_{2^n} = 2^{n+1} R \sin\alpha_n$, $\alpha_n \le \alpha_4 = 45°$, $n \ge 2$, то

$$0 \le P'_{2^n} - P'_{2^{n-1}} = \frac{P'_{2^n}\left(P'_{2^{n+1}}\right)^2}{2^{2n+3} R^2 \cos\alpha_n} \le \frac{\left(P'_4\right)^3}{2^{2n+3} R^2 \cos 45°} \to 0,\ n \to \infty.$$

У той же час $P'_{2^n} - P'_{2^{n-1}} \to L(R) - l(R)$, $n \to \infty$. Внаслідок єдиності границі: $L(R) - l(R) = 0$, або $L(R) = l(R)$.

г) *Означення довжини кола. Спільне значення* $L(R) = l(R)$ *називається довжиною кола радіуса* R. З міркувань подібності випливає, що периметр правильного n-кутника, вписаного в коло радіуса R, у R разів більший за периметр правильного n-кутника, вписаного в коло одиничного радіуса. Звідси $l(R) = Rl(1)$. Число $\frac{l(1)}{2}$ позначається буквою π.

Приклад 5. Розглянемо послідовність

$$\{a_n,\ n \ge 1\} = \left\{\sqrt{3}, \sqrt{3+2\sqrt{3}}, \sqrt{3+2\sqrt{3+2\sqrt{3}}}, \ldots\right\}.$$

Дослідження її збіжності проведемо в кілька етапів.

а) *Монотонність.* Справедлива нерівність

$$a_{n+1} = \underbrace{\sqrt{3+2\sqrt{3+\ldots+2\sqrt{3+2\sqrt{3}}}}}_{n+1 \text{ коренів}} > \underbrace{\sqrt{3+2\sqrt{3+\ldots+2\sqrt{3}}}}_{n \text{ коренів}} = a_n.$$

б) *Обмеженість зверху.* Для довільного n маємо

$$a_n = \underbrace{\sqrt{3+2\sqrt{3+\ldots+2\sqrt{3+2\sqrt{3}}}}}_{n \text{ коренів}} < \underbrace{\sqrt{3+2\sqrt{3+\ldots+2\sqrt{3+2\sqrt{3+6}}}}}_{n \text{ коренів}} =$$

$$= \underbrace{\sqrt{3+2\sqrt{3+\ldots+2\sqrt{9}}}}_{n-1 \text{ коренів}} = \ldots = \sqrt{3+2\sqrt{9}} = 3.$$

в) *Збіжність.* За наслідком 1 $\{a_n\}$ збігається до деякого числа x.

г) *Знаходження* x. Послідовність $\{a_n\}$ можна задати рекурентно: $a_1 = \sqrt{3}$, $a_{n+1} = \sqrt{3+2a_n}$, $n \geq 1$, або $a_{n+1}^2 = 3+2a_n$. Спрямовуючи n до нескінченності, одержуємо рівняння

$$x^2 = 3+2x;\ x_1 = -1,\ x_2 = 3.$$

Оскільки $a_n > 0$, $n \geq 1$, то корінь x_1 відкидаємо. Отже, $a_n \to 3$, $n \to \infty$.

Теорема 2 застосовується також для означення основи натуральних логарифмів – числа e, яке може бути введене як границя зростаючої й обмеженої послідовності $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, n \geq 1\right\}$. (Див. книгу *А. Я.Дороговцев.* Математичний аналіз: Підручник. Частина 1 — К.: Либідь, 1993. – 320 с.)

На закінчення наведемо ще один важливий наслідок теореми 2.

Наслідок 3 (теорема Больцано – Вейєрштрасса). ***Кожна обмежена послідовність містить збіжну підпослідовність.***

Доведення

Нехай $\{a_n\}$ – обмежена послідовність. За теоремою 1 § 1 вона містить монотонну підпослідовність, що також обмежена і в силу теореми 2 збігається. ∎

Завдання 10. Довести збіжність до нуля послідовностей

$$\left\{\frac{n^3}{3^n}\right\}, \left\{\frac{(2n)!}{2^{n^2}}\right\}.$$

Вказівка. Скористайтеся наслідком 2.

Завдання 11. Аналогічно до приклада 4 дати означення площі круга і виразити її через довжину кола.

Завдання 12. Довести збіжність і знайти границю послідовності, заданої співвідношеннями $a_1 \in [-1; 1]$, $a_{n+1} = -\operatorname{arctg} a_n$, $n \geq 1$ (див. завдання 3 § 2).

Завдання 13. Для яких $a > 0$ збігається послідовність

$$\left\{\sqrt{a}, \sqrt{a+\sqrt{a}}, \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}, \ldots\right\}?$$

У випадку збіжності знайти її границю.

Вказівка. Почніть з геометричної інтерпретації. Зобразіть цю послідовність на графіку функції $y = \sqrt{a+x}$.

Завдання 14*. Довести збіжність і знайти границю послідовності

$$\left\{1, \frac{1}{1+1}, \frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}, \ldots\right\}.$$

Зауваження. Має місце випадок «павутинки» (див. вказівку до завдання 3 § 2). Такі дроби називаються ланцюговими. Існує аналогія між ланцюговими дробами і десятковими наближеннями числа.

Завдання 15*. Для яких $a > 1$ збігається послідовність

$$\left\{a, a^a, a^{a^a}, \ldots\right\}?$$

Вказівка. Існує таке критичне значення $a_0 > 1$, що при $a > a_0$ послідовність розбігається, а при $1 < a \le a_0$ збігається. Знайдіть це значення з умови дотику графіків функцій $y = a^x$ і $y = x$.

Завдання 16*. Послідовність $\{a_n\}$ обмежена та задовольняє одне з наступних співвідношень:

$$a_{n+1} \ge a_n - \frac{2}{3^n}, \ \forall n \ge 1;$$

$$a_{n+2} \ge \frac{a_{n+1} + 3a_n}{4}, \ \forall n \ge 1. \qquad (4.1)$$

Довести збіжність послідовності $\{a_n\}$.

Вказівка. Розгляньте допоміжну послідовність.

Цікаві узагальнення умови збіжності (3.1) є у статті А. В. Князюка «Деякі узагальнення теореми про монотонну обмежену послідовність» (У світі математики. – 1980. – Вип. 11. – С. 127–133) і в статті О.Г.Кукуша та Р.П.Ушакова «Про рекурентне зважування» (У світі математики. – 2002. – Том 8, вип. 1. – С. 19–30).

Завдання 17. Побудувати необмежену послідовність, з якої можна виділити збіжну підпослідовність. Чи не можна в теоремі Больцано–Вейєрштрасса відкинути умову обмеженості?

Завдання 18*. За допомогою теореми Вейєрштрасса довести існування арифметичного квадратного кореня з довільного додатного числа x, тобто існування такого додатного y, що $y^2 = x$.

Вказівка. Побудуйте дві послідовності $\{a_n\}$ та $\{b_n\}$ такі, що: $a_n^2 \le x < b_n^2$, $b_n = a_n + 10^{-n}$, де a_n записується у вигляді десяткового дробу з n знаками після коми.

Завдання 19*. Нехай $A_0B_0C_0$ – довільний нерівносторонній трикутник. Через $A_1B_1C_1$ позначимо трикутник, вершинами якого є точки перетину бісектрис $\Delta A_0B_0C_0$ з описаним навколо нього колом. Аналогічно для $\Delta A_1B_1C_1$ визначимо $\Delta A_2B_2C_2$ і т.д. Нехай S_n – площа $\Delta A_nB_nC_n$, $n \ge 0$. Довести, що послідовність $\{S_n, n \ge 0\}$ зростає і прямує до площі правильного трикутника, вписаного в те саме коло. Вивести звідси, що з усіх трикутників, вписаних у дане коло, правильний трикутник має найбільшу площу.

Вказівка. Виразіть S_n через радіус кола і кути $\Delta A_nB_nC_n$. Знайдіть зв'язок між кутами n-го і $(n-1)$-го трикутників і доведіть нерівність $S_0 < S_1$. Існування границі виведіть з теореми Вейєрштрасса. Доведіть, що кути $\Delta A_nB_nC_n$ прямують до 60°.

РОЗДІЛ III. ЕЛЕМЕНТАРНІ ВЛАСТИВОСТІ МОНОТОННИХ ФУНКЦІЙ

§ 1. Означення та найпростіші приклади

У попередніх розділах розглядалися монотонні функції з дискретною областю визначення, а саме: вивчалися відображення, задані на скінченній множині або на множині всіх натуральних чисел. Перейдемо до функцій, визначених на довільній множині дійсних чисел.

Нехай $A \subset \mathbb{R}$, f – деяке відображення з A в $\mathbb{R}$, $B \subset A$.

Означення 1. *Функція f називається зростаючою (спадною) на множині B, якщо для кожної пари точок x_1, x_2 з B такої, що $x_1 < x_2$, справедлива нерівність*

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2)).$$

Означення 2. *Функція f називається неспадною (незростаючою) на B, якщо для кожної пари точок x_1, x_2 з B такої, що $x_1 < x_2$, справедлива нерівність*

$$f(x_1) \le f(x_2) \quad (f(x_1) \ge f(x_2)).$$

Означення 3. *Функція f називається монотонною на B, якщо вона належить одному з перелічених вище чотирьох типів. Функція f називається строго монотонною на B, якщо вона або зростає, або спадає на B.*

Означення 4. *Нехай функція f задовольняє одне з означень 1–3, причому $B = A$. Тоді вона називається відповідно зростаючою (спадною тощо) без вказування множини B.*

Означення 5. *Нехай функція f зростаюча (спадна), а функція g спадна (зростаюча), то f і g називаються строго монотонними різного типу. Якщо ж f зростаюча (спадна) і g зростаюча (спадна), то f і g називаються строго монотонними одного типу.*

Геометрично монотонність функції f означає, що її графік із збільшенням аргументу піднімається вгору (якщо f зростаюча) або опускається вниз (якщо f спадна). Типові графіки наведені на малюнку 6.

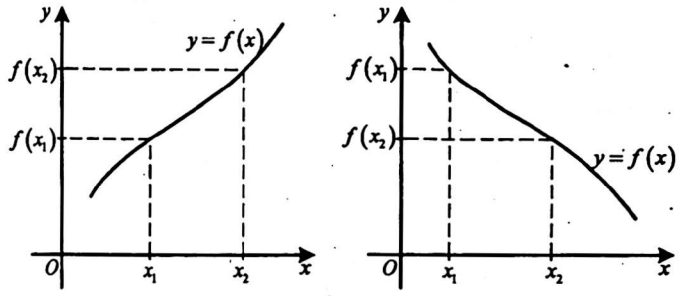
Завдання 1. Перевірити, що впорядкований за величиною набір чисел (див. § 1, р. 1) задає неспадну або незростаючу функцію, визначену на множині виду $\{1, 2, ..., n\}$.

Завдання 2. Чи узгоджуються означення § 1 р. II і означення 1–4?

Завдання 3. Функція f монотонна, якщо добуток приростів аргументу та функції

$$(f(x_1)-f(x_2))(x_1-x_2),$$

де x_1, x_2 – довільні точки з області визначення f, не набуває двох значень протилежних знаків. Довести.



Мал.6

Завдання 4. Функція f монотонна тоді і тільки тоді, коли для кожної трійки чисел x_1, x_2, x_3 з області визначення, такої, що $x_1 < x_2 < x_3$, набір чисел $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$ є впорядкованим за величиною. Довести.

Завдання 5. Функція f періодична з періодом T і монотонна на множині A. Тоді f монотонна також на множині $A+nT=\{a+nT:\ a\in A\}$, де n – довільне ціле число. Довести.

Наведемо кілька прикладів елементарних функцій, монотонність яких випливає безпосередньо з означення.

Приклад 1. Зафіксуємо $\alpha>0$. Степенева функція

$$f(x)=x^{\alpha},\ x\geq 0,$$

є зростаючою.

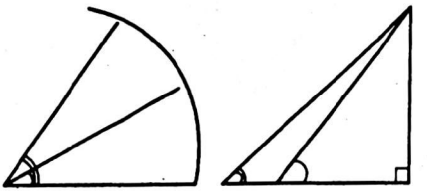
Приклад 2. Зафіксуємо $a>1$. Показникова функція

$$f(x)=a^{x},\ x\in\mathbb{R},$$

є зростаючою.

Приклад 3. Функція $y = \sin x$ зростає на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Завдання 6. Користуючись малюнком 7, придумайте два доведення твердження з прикладу 3.



Мал.7

Приклад 4. Функція оберненої пропорційності

$$f(x) = \frac{1}{x},\ x \neq 0,$$

спадає на кожному з інтервалів $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$ і не є монотонною на всій області визначення $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Розв'язання

Пояснимо тільки останнє твердження. Розглянемо три точки

$$a = -1 < b = 1 < c = 2.$$

Оскільки

$$f(a) = -1 < f(b) = 1,$$

то f не є неспадною на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. У той же час

$$f(b) = 1 > f(c) = \frac{1}{2},$$

і f не є незростаючою.

Цей приклад застерігає від поширеної помилки. На перший погляд здається очевидним, що монотонність функції f на кожній з множин A та B спричинює монотонність на їхньому об'єднанні. Однак це не завжди правильно.

Завдання 7. Якими повинні бути множини A та B, щоб будь-яка функція, монотонна на кожній з них, була монотонною на $A \cup B$?

Функції з прикладів 1–4 строго монотонні. Найпростішою монотонною функцією, що не є монотонною в строгому сенсі, є стала функція

$$f(x) = c, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

де c – деяке фіксоване число.

Розглянемо складнішу функцію.

Приклад 5. Функція обчислення цілої частини дійсного числа

$$f(x) = [x], \quad x \in \mathbb{R}$$

є неспадною і не є зростаючою.

Розв'язання

Нехай $x_1 < x_2$ – довільні дійсні числа. Їх можна подати у вигляді

$$x_i = m_i + \gamma_i, \; i = 1, 2,$$

де $m_i \in \mathbb{Z}$, $0 \le \gamma_i < 1$.

Тоді

$$m_1 \le m_1 + \gamma_1 < m_2 + \gamma_2 < m_2 + 1; \; m_1 < m_2 + 1.$$

Оскільки числа m_1 і m_2 цілі, то з останньої нерівності випливає, що

$$[x_1] = m_1 \le m_2 = [x_2].$$

Отже, f не спадає.

Розглянемо тепер точки $a = 0 < b = \frac{1}{2}$. Маємо:

$$f(a) = [0] = 0 = \left[\frac{1}{2}\right] = f(b).$$

Виходить, f не є зростаючою.

Завдання 8. Чи є монотонною функція обчислення дробової частини дійсного числа

$$f(x) = \{x\}, \; x \in \mathbb{R}?$$

Завдання 9. Функція f зростає тоді і тільки тоді, коли функція $(-f)$ спадає. Довести.

§ 2. Монотонність породжує монотонність

Щоб розширити клас монотонних функцій, дослідимо, які операції зберігають цю властивість.

***Теорема* 1.** *Нехай функції f_1 і f_2 зростають (не спадають) на множині A. Тоді функції cf_1, де $c > 0$, і $f_1 + f_2$ зростають (не спадають) на A.*

Доведення

Обмежимося лише випадком строгої монотонності. Нехай $x_1 \in A$, $x_2 \in A$, $x_1 < x_2$. Тоді

$$f_1(x_1) < f_1(x_2), \quad f_2(x_1) < f_2(x_2). \tag{2.1}$$

Помножимо першу нерівність на $c > 0$. Маємо $cf_1(x_1) < cf_1(x_2)$, і функція cf_1 зростає на A. Додамо нерівності (2.1), одержуємо:

$$(f_1 + f_2)(x_1) = f_1(x_1) + f_2(x_1) < f_1(x_2) + f_2(x_2) = (f_1 + f_2)(x_2),$$

і $f_1 + f_2$ також зростає на A. ◆

Завдання 1. Якщо функція f_1 зростає (спадає) на A, а функція f_2 не спадає (не зростає) на A, то $f_1 + f_2$ зростає (спадає) на A. Довести.

Завдання 2. Нехай $a > 0$, $b > 0$. Довести, що в умовах теореми 1 лінійна комбінація $af_1 + bf_2$ зростає (не спадає) на A.

Завдання 3. Користуючись завданням 9 § 1, довести аналог теореми 1 для спадних функцій.

Завдання 4. Нехай функції f_1 і f_2 зростають на A. Чи може різниця $f_1 - f_2$:

а) зростати;
б) спадати;
в) бути монотонною в нестрогому сенсі;
г) не бути монотонною на A?

***Теорема* 2.** *Нехай функції f_1 і f_2 зростають і додатні на множині A. Тоді добуток $f_1 f_2$ також зростає на A.*

Доведення

Достатньо перемножити нерівності (2.1), утворені з додатних чисел. ◆

***Теорема* 3.** *Нехай функції f_1 і f_2 додатні на множині A, f_1 зростає на цій множині, а f_2 спадає. Тоді частка $\frac{f_1}{f_2}$ зростає на A.*

Доведення

Нехай $x_1 \in A$, $x_2 \in A$, $x_1 < x_2$. Тоді

$$0 < f_1(x_1) < f_1(x_2), \quad 0 < f_2(x_2) < f_2(x_1).$$

З другої нерівності випливає нерівність

$$\frac{1}{f_2(x_1)} < \frac{1}{f_2(x_2)}.$$

Перемножимо першу і останню нерівності. Маємо:

$$\frac{f_1(x_1)}{f_2(x_1)} < \frac{f_1(x_2)}{f_2(x_2)}, \quad \frac{f_1}{f_2}(x_1) < \frac{f_1}{f_2}(x_2). \blacksquare$$

Теорема 4. *Нехай $f: A \to B$ зростає і функція g зростає на B. Тоді складна функція*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \ x \in A,$$

також зростає.

Доведення

Нехай $x_1 \in A$, $x_2 \in A$, $x_1 < x_2$. Тоді

$$y_1 = f(x_1) < y_2 = f(x_2); \quad y_1 \in B, \ y_2 \in B.$$

Звідси

$$(g \circ f)(x_1) = g(y_1) < g(y_2) = (g \circ f)(x_2). \blacksquare$$

Завдання 5. Якщо функції $f: A \to B$ і $g: B \to \mathbb{R}$ строго монотонні різного типу, то складна функція $g \circ f$ спадає; якщо ж вони строго монотонні одного типу, то складна функція $g \circ f$ зростає. Довести.

Завдання 6. Сформулювати аналог теореми 4, коли одна з функцій f або g не спадає.

Теорема 5. *Нехай функція f зростає (спадає). Тоді обернена функція f^{-1} існує і також зростає (спадає).*

Доведення

Обмежимося випадком зростання. Нехай y_0 — довільна фіксована точка з $E(f)$. Існує така точка $x_0 \in D(f)$, що $f(x_0) = y_0$. Жодна

інша точка при відображенні f у точку y_0 не переходить, оскільки коли $x_1 < x_0 < x_2$, $x_1 \in A$, $x_2 \in A$, маємо

$$f(x_1) < f(x_0) = y_0 < f(x_2).$$

Отже, обернене відображення існує, діє з $E(f)$ у $D(f)$ і переводить точку y_0 в точку x_0.

Нехай $y_1 \in E(f)$, $y_2 \in E(f)$, $y_1 < y_2$ і $x_1 \in D(f)$, $x_2 \in D(f)$ – відповідні прообрази цих точок. Якщо $x_1 \geq x_2$, то

$$y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2,$$

що неможливо. Отже,

$$f^{-1}(y_1) = x_1 < x_2 = f^{-1}(y_2). \blacksquare$$

Завдання 7. Функції f, g і φ такі, що

$$\varphi(f(x)) = g(\varphi(x)), \quad x \in \mathbb{R},$$

причому φ строго монотонна. Тоді, якщо g зростає, то f зростає. Довести. Чи правильне обернене твердження: зростання f спричинює зростання g?

§ 3. Інші приклади монотонних функцій

Застосуємо теореми 1–5 § 2 для обґрунтування монотонності деяких елементарних функцій.

Приклад 1. Лінійна функція

$$f(x) = kx + b, \quad x \in \mathbb{R},$$

де k, b – дійсні параметри, зростає при $k > 0$ і спадає при $k < 0$.

Доведемо це. Нехай $x_1 < x_2$. Тоді

$$f(x_1) - f(x_2) = k(x_1 - x_2).$$

Якщо $k > 0$, то $f(x_1) - f(x_2) < 0$ і f зростає.

Якщо $k < 0$, то $f(x_1) - f(x_2) > 0$ і f спадає.

Приклад 2. Квадратична функція

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad x \in \mathbb{R},$$

де a, b, c – дійсні параметри, $a \neq 0$, при $a > 0$ спадає на $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$ і

зростає на $\left[-\frac{b}{2a};+\infty\right)$; при $a<0$ характер монотонності f на цих інтервалах змінюється на протилежний.

Обмежимося випадком $a>0$. Виділяючи повний квадрат, перетворимо f до вигляду

$$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+d, \qquad (3.1)$$

де $d=c-\frac{b^2}{4a}$.

Позначимо через f_1 і f_2 відповідно звуження f на проміжки $\left[-\frac{b}{2a};+\infty\right)$ і $\left(-\infty;-\frac{b}{2a}\right]$. Введемо також функції

$$f_3(x)=x^2,\ x\ge 0; \qquad f_4(x)=x^2,\ x\le 0.$$

З (3.1) випливають рівності

$$f_1(x)=af_3\left(x+\frac{b}{2a}\right)+d,\ x\ge-\frac{b}{2a}; \qquad (3.2)$$

$$f_2(x)=af_4\left(x+\frac{b}{2a}\right)+d,\ x\le-\frac{b}{2a}. \qquad (3.3)$$

Функція f_3 зростає як степенева з показником $\alpha=2>0$ (див. приклад 1 § 1), внутрішня лінійна функція $x+\frac{b}{2a}$ зростає (див. приклад 1 цього параграфа), і за теоремою 4 § 2 складна функція $f_3\left(x+\frac{b}{2a}\right)$, $x\in\left[-\frac{b}{2a};+\infty\right)$, також зростає. Згідно з теоремою 1§ 2 остання функція після множення на $a>0$ залишається зростаючою. З рівності (3.2) і завдання 1 § 2 випливає тепер зростання f_1.

Для функції f_2 міркування аналогічні й спираються на (3.3). Варто врахувати тільки, що на відміну від f_3 функція f_4 спадає. Справді,

$$f_4(x)=f_3(-x),\ x\le 0,$$

f_3 зростає, внутрішня лінійна функція $(-x)$ спадає, і тепер із завдання 5 § 2 випливає спадання f_4.

Приклад 3. При $\alpha > 0$ степенева функція $f(x) = x^{-\alpha}$, $x > 0$, є спадною.

Справді, функція

$$g(x) = x^{\alpha}, \quad x > 0,$$

додатна і зростає (див. приклад 1 § 1). Функція $f = \frac{1}{g}$ і тому спадає.

Завдання 1. Дослідити на монотонність функцію

$$f(x) = x^m, \quad x < 0,$$

з цілим показником m.

Завдання 2. Довести, що при $0 < a < 1$ показникова функція

$$f(x) = a^x, \quad x \in \mathbf{R},$$

є спадною.

Приклад 4. Зафіксуємо $n \in \mathbf{Z}$. Функція $f(x) = \sin x$ зростає на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$ і спадає на проміжку $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$.

Доведемо це. Функція $f(x) = \sin x$ непарна і зростає на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ (див. приклад 3 § 1). Згідно із завданням 7 § 2 вона зростає також на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Функція $f(x) = \sin x$ періодична з періодом $T = 2\pi$, і згідно із завданням 5 § 1 вона зростає на кожному проміжку виду $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \mathbf{Z}$.

Якщо $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, то $\sin x = \sin(\pi - x)$.

Тут внутрішня лінійна функція $(\pi - x)$ спадає, $(\pi - x) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = \sin x$ зростає на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і, згідно із завданням 5 § 2, спадає

на $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$. Посилання на завдання 5 § 1 завершує доведення.

Завдання 3. Дослідити на монотонність функції $f(x)=\cos x$, $g(x)=\operatorname{tg} x$, $h(x)=\operatorname{ctg} x$, користуючись формулами зведення і виражаючи тангенс через синус і косинус.

Приклад 5. Нехай $c\neq 0$, $ad-bc\neq 0$. Дробово-лінійна функція

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d},\quad x\neq -\frac{d}{c}, \tag{3.4}$$

строго монотонна на кожному з інтервалів $\left(-\infty;-\frac{d}{c}\right)$ і $\left(-\frac{d}{c};+\infty\right)$.

Якщо $ad-bc>0$, то функція f на них зростає, а коли $ad-bc<0$, то спадає.

Доведемо це. У чисельнику і знаменнику дробу (3.4) містяться многочлени. Поділивши їх у стовпчик, одержимо:

$$f(x)=\frac{a}{c}+\frac{b-\frac{ad}{c}}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c^2}\cdot\frac{1}{x+\frac{d}{c}}.$$

Введемо функцію оберненої пропорційності:

$$g(x)=\frac{1}{x},\quad x\neq 0.$$

Тоді

$$f(x)=\alpha+\beta g\left(x+\frac{d}{c}\right),\quad x\neq -\frac{d}{c}, \tag{3.5}$$

де $\alpha=\frac{a}{c}$, $\beta=\frac{bc-ad}{c^2}$.

Внутрішня лінійна функція зростає, g спадає на кожному з інтервалів $(-\infty;0)$ і $(0;+\infty)$. Тому складна функція $g\left(x+\frac{d}{c}\right)$ спадає на інтервалах $\left(-\infty;-\frac{d}{c}\right)$ і $\left(-\frac{d}{c};+\infty\right)$. З рівності (3.5) робимо висновок,

що при $\beta > 0$, тобто коли $ad - bc < 0$, f також спадає на кожному з цих інтервалів, а при $\beta < 0$, тобто коли $ad - bc > 0$, f на них зростає.

Приклад 6. Логарифмічна функція $f(x) = \log_a x$, $x > 0$, зростає при $a > 1$ і спадає при $0 < a < 1$.

Доведемо це. Функція f є оберненою до функції

$$g(x) = a^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Коли $a > 1$, функція g зростає (див. приклад 2 § 1), і за теоремою 5 § 2 функція f зростає. Аналогічно, коли $0 < a < 1$, функція g спадає, й обернена функція f також спадає.

Завдання 4. Дослідити на монотонність обернені тригонометричні функції.

Завдання 5*. Відомо, що будь-яке кубічне рівняння має хоча б один дійсний корінь (це випливає з властивостей неперервних функцій).

Позначимо через $f(x)$ дійсний корінь кубічного рівняння

$$t^3 + t = x,$$

а через $g(x)$ – найменший дійсний корінь рівняння

$$t^3 - t = x. \tag{3.6}$$

Перевірити, що функції f і g коректно задані на $\mathbb{R}$ і зростають.

Вказівка. Намалюйте ескіз графіка кубічної функції, що стоїть у лівій частині виразу (3.6), і замініть це рівняння деяким рівнянням виду $h(t) = x$, де h – зростаюча функція.

§ 4. Елементарне дослідження функцій на монотонність

Як показано в прикладі 2 § 3, квадратична функція не є монотонною на всій області визначення. Вона монотонна лише на деяких проміжках, які називаються *інтервалами монотонності*. Дослідити задану функцію f на монотонність і означає знайти такі інтервали, а також з'ясувати характер зміни функції f на них. Найбільш потужним інструментом такого дослідження, як побачимо нижче, є диференціальне числення. Однак у простих ситуаціях застосовувати похідну – це те саме, що стріляти з гармати по горобцях. Нижче наве-

демо приклади таких ситуацій: в одних випадках використаємо властивості монотонних функцій і приклади § 3, в інших – звернемося безпосередньо до означення монотонності.

Задача 1. Дослідити на монотонність функцію

$$f(x)=\frac{\lg(x+1)}{\lg x},\ x\in(0;1)\cup(1;+\infty). \qquad (4.1)$$

Розв'язання

Почнемо з інтервалу $(0;1)$. Щоб застосувати теорему 3 § 2, перетворимо дану функцію:

$$f(x)=-\frac{\lg(1+x)}{\lg\frac{1}{x}},\ x\in(0;1). \qquad (4.2)$$

І чисельник, і знаменник дробу у правій частині (4.2) додатні. За теоремою про монотонність складної функції чисельник зростає, а знаменник спадає (функція оберненої пропорційності спадає, а lg зростає). За теоремою 3 § 2 дріб зростає, і f спадає на $(0;1)$.

На інтервалі $(1;+\infty)$ цю теорему вже не можна застосувати безпосередньо, оскільки тут чисельник і знаменник дробу (4.1), хоча і додатні, обидва зростають. Оскільки

$$\lg(x+1)=\lg\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=\lg x+\lg\left(1+\frac{1}{x}\right),$$

то

$$f(x)=\frac{\lg\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\lg x}+1. \qquad (4.3)$$

Коли $x\in(1;+\infty)$, чисельник дробу (4.3) спадає, знаменник зростає, обидві ці функції додатні, а їх частка, а тому й f, спадає на $(1;+\infty)$. Функція f не є спадною на всій області визначення, оскільки $f(x)<0$ при $x\in(0;1)$ і $f(x)>0$ при $x\in(1;+\infty)$. ◀

Задача 2. Дослідити на монотонність функцію

$$f(x)=\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)},\quad x\neq-\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

Розв'язання

Функція періодична з періодом π (перевірте!), тому достатньо обмежитися інтервалом $\left(-\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right)$. Зробимо заміну $x+\frac{\pi}{6}=t$, звідки $x=t-\frac{\pi}{6}$. Маємо, якщо $t\in(0;\pi)$:

$$f\left(t-\frac{\pi}{6}\right)=g(t)=\frac{\sin\left(t-\frac{\pi}{3}\right)}{\sin t}=\frac{\frac{1}{2}\sin t-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t}{\sin t}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ctg}t.$$

Функція $h(t)=\operatorname{ctg}t$, $t\in(0;\pi)$, спадає, і g зростає на $(0;\pi)$. Оскільки

$$f(x)=g\left(x+\frac{\pi}{6}\right),\ x\in\left(-\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right),$$

то функція f зростає на цьому інтервалі, а отже, і на кожному інтервалі виду $\left(-\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{5\pi}{6}+\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$. ◆

Задача 3. Дослідити на монотонність функцію

$$f(x)=x+\sin x,\quad x\in\mathbf{R}.$$

Розв'язання

Нехай $x_1<x_2$. Оцінимо приріст функції

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)+(\sin x_2-\sin x_1)=$$

$$=(x_2-x_1)+2\sin\frac{x_2-x_1}{2}\cos\frac{x_2+x_1}{2}\geq(x_2-x_1)-2\left|\sin\frac{x_2-x_1}{2}\right|.$$

Скориставшись відомою нерівністю $|\sin x| < |x|$, $x \neq 0$, маємо:

$$f(x_2) - f(x_1) > (x_2 - x_1) - 2\left|\frac{x_2 - x_1}{2}\right| = 0.$$

Отже, f зростає на $\mathbf{R}$. ◀

Задача 4. Дослідити на монотонність функцію

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad x \neq 0.$$

Розв'язання

Нехай $0 < x_1 < x_2$. Утворимо різницю

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) + \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right) = \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}(x_1 x_2 - 1).$$

Якщо $x_2 \leq 1$, то $x_1 < 1$, $x_1 x_2 - 1 < 0$, і $f(x_2) < f(x_1)$. Отже, f спадає на $(0; 1]$.

Якщо $x_1 \geq 1$, то $x_2 > 1$, $x_1 x_2 - 1 > 0$, і f зростає на $[1; +\infty)$.

Оскільки функція f непарна (див. завдання 7 § 2), вона зростає на $(-\infty; -1]$ і спадає на $[-1; 0)$. ◀

Завдання 1. Довести, що функція $f(x) = x - \frac{1}{x}$, $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ зростає на кожному з цих двох інтервалів і не є монотонною на всій області визначення.

Наведемо кілька цікавих функцій, що зводяться до функцій $x + \frac{1}{x}$ та $x - \frac{1}{x}$.

Задача 5. Дослідити на монотонність гіперболічний синус

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbf{R},$$

і гіперболічний косинус

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Розв'язання

Зробимо заміну $e^x = t$, $t > 0$. Звідси $x = \ln t$. Експонента – зростаюча функція, і тому ця заміна зберігає характер монотонності заданих функцій. Маємо

$$f_1(t) = \operatorname{sh}(\ln t) = \frac{t - t^{-1}}{2},\ f_2(t) = \operatorname{ch}(\ln t) = \frac{t + t^{-1}}{2},\ t > 0.$$

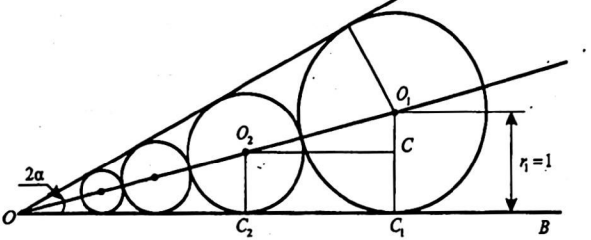
Згідно із завданням 1 функція f_1 зростає. Повертаючись до змінної x, одержуємо

$$\operatorname{sh} x = f_1(e^x),\quad x \in \mathbf{R}.$$

За теоремою 4 § 2 гіперболічний синус також зростає.

Якщо $0 < t \le 1$, то функція f_2 спадає, а коли $t \ge 1$ – зростає (див. задачу 4). З рівності $\operatorname{ch} x = f_2(e^x)$, $x \in \mathbf{R}$, випливає, що гіперболічний косинус спадає, коли $e^x \le 1$, або $x \le 0$, і зростає, якщо $e^x \ge 1$, або $x \ge 0$. ▮

Задача 6. У даний кут AOB величиною 2α радіан, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, вписано коло одиничного радіуса. У цей кут вписано також менше коло, що дотикається до першого, потім вписано ще менше коло, яке дотикається до другого, і т.д. (мал. 8). Так побудовано нескінченну множину вписаних кіл, які дотикаються до сусідніх кіл.



Мал. 8

Нехай $S(\alpha)$ – загальна площа всіх побудованих кругів. Дослідити на монотонність функцію S.

Розв'язання

Знайдемо спочатку радіуси кіл. Позначимо через $r_1=1$, r_2, r_3, ... радіуси першого, другого, третього і т.д. кіл. Нехай O_1, O_2, ... – їх центри; O_1C_1, O_2C_2 – радіуси, перпендикулярні до сторони кута OB. Опустимо перпендикуляр O_2C з точки O_2 на відрізок O_1C_1. З ΔO_1O_2C маємо:

$$\frac{O_1C}{O_1O_2}=\frac{r_1-r_2}{r_2+r_1}=\sin\alpha,$$

звідки

$$\frac{r_2}{r_1}=\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}.$$

Аналогічно

$$\frac{r_k}{r_{k-1}}=\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}.$$

Тому радіуси кіл утворюють геометричну прогресію зі знаменником

$$q=\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha},\ q\in(0;1).$$

Тоді площі кругів утворюють нескінченно спадну геометричну прогресію з першим членом $\pi r_1^2=\pi$ і знаменником

$$\overline{q}=\left(\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}\right)^2.$$

Отже, сума площ $S(\alpha)$ є сумою усіх членів нескінченно спадної геометричної прогресії і дорівнює

$$S(\alpha)=\frac{\pi}{1-\left(\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}\right)^2}=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{(1+\sin\alpha)^2}{\sin\alpha}=\frac{\pi}{4}\cdot\left(\sin\alpha+\frac{1}{\sin\alpha}+2\right).$$

Нехай $f(x)=x+\frac{1}{x}$; $x\neq 0$. Тоді $S(\alpha)=\frac{\pi}{4}\cdot\left(f(\sin\alpha)+2\right)$.

Функція $\sin x$ зростає на $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ і набуває значень з інтервалу (0; 1), функція f спадає на цьому інтервалі, і тому складна функція

$$f(\sin\alpha),\ \alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right),$$

спадає. Отже, S спадає.

Ми одержали несподіваний результат: чим більший кут AOB, тим менша сумарна площа вписаних кругів. Утім, цей результат стає геометрично очевидним, якщо зафіксувати перше коло і пряму OB та рухати сторону OA кута, описаного навколо цього кола. ◀

Завдання 2. В умовах задачі 6 дослідити на монотонність сумарну довжину $L(\alpha)$ всіх кіл.

Завдання 3. Дослідити на монотонність функції:

а) $(\sin x-\cos x+2)^{-1}$, $x\in\mathbf{R}$,

б) $\sin^2 x-\cos x$, $x\in\mathbf{R}$,

в) $\sin 3x+5\sin^3 x-3\sin^2 x$, $x\in\mathbf{R}$,

г) $f(x)=(\ln x)^x$, $x>e$ (*вказівка*: розгляньте функцію $\ln f$).

§ 5. Функціональні рівняння

Властивості монотонних функцій висвітлюються новими гранями під час розв'язування так званих функціональних рівнянь. Розглянемо наступну задачу. Знайти усі функції f, що задовольняють рівність

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\qquad (5.1)$$

де x і y – довільні дійсні числа.



Такі рівності, у яких шуканою є *функція*, називаються *функціональними рівняннями*.

На відміну від звичайних рівнянь, де потрібно знайти значення однієї або кількох незалежних змінних, тут шукаються значення функції f в усіх точках її області визначення.

Функціональне рівняння (5.1) було введено видатним французьким математиком О. Коші.

Огюстен Луї Коші (1789–1857) – автор фундаментальних результатів у математичному аналізі, теорії аналітичних функцій, геометрії, математичній фізиці. Вперше дав строге означення границі функції в точці.

Функціональне рівняння відіграє важливу роль у різних галузях природознавства. Є важливий клас розв'язків рівняння Коші: лінійні функції виду

$$f(x)=kx, \qquad (5.2)$$

де k (кутовий коефіцієнт) є фіксованим дійсним числом. Виявляється, якщо на функцію f накласти додатково певне обмеження, наприклад неперервність або монотонність, то всі розв'язки цим класом і обмежуються.

Введемо спочатку важливе поняття локальної монотонності.

Означення 1. *Функція f монотонна (тобто зростає, не спадає тощо) у точці x_0, якщо існує таке $\delta>0$, що f монотонно (відповідно зростає, не спадає тощо) в околі $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ цієї точки.*

Наприклад, функція $|x|$, $x\in\mathbf{R}$, зростає в точці $x=1$, оскільки вона зростає в околі $(0; 2)$ цієї точки. Ця функція спадає в точці $x=-1$ (чому?) і не є монотонною в точці $x=0$, бо для будь-якого інтервалу $(-\delta; \delta)$, $\delta>0$, ця функція спадає в лівому півоколі $(-\delta; 0]$ і зростає в правому півоколі $[0; \delta)$.

Теорема 1. *Нехай функція f монотонна у точці 0 і задовольняє рівність* (5.1). *Тоді f є лінійною функцією виду* (5.2).

Доведення

Покладаючи в рівності (5.1) $y=x$, одержуємо

$$f(2x)=2f(x).$$

Далі маємо:

$$f(3x)=f(2x)+f(x)=3f(x).$$

Міркуючи аналогічно, приходимо до рівності

$$f(nx)=nf(x), \qquad (5.3)$$

де $n\in\mathbf{N}$ і $x\in\mathbf{R}$ – довільні числа.

Покажемо, як у цьому співвідношенні можна перейти від натуральних n до раціональних. Покладемо у виразі (5.3) $nx=y$. Тоді

$$f\left(\frac{y}{n}\right)=\frac{1}{n}f(y),$$

звідки внаслідок рівності (5.3) при натуральних m, n одержуємо для довільного y

$$f\left(\frac{m}{n}y\right)=mf\left(\frac{y}{n}\right)=\frac{m}{n}f(y).$$

Покладаючи в рівності (5.1) $y=0$, знаходимо

$$f(0)=0,$$

а покладаючи в тій же рівності $y=-x$, отримуємо, що f є непарною функцією. Це дає змогу поширити рівність

$$f(rx)=rf(x) \qquad (5.4)$$

з додатних раціональних r на всі раціональні числа. Отже, при будь-якому $r\in\mathbb{Q}$

$$f(r)=rf(1). \qquad (5.5)$$

Не обмежуючи загальності, можна вважати, що f не спадає в точці 0 (чому?). Тому при $h>0$, $h<\delta$, де δ достатньо мале додатне число, маємо

$$0=f(0)\le f(h).$$

З рівності (5.3) тоді випливає невід'ємність f для всіх невід'ємних x. Нехай $\alpha>0$, $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Існує таке $r\in\mathbb{Q}$, що $\alpha-\delta<r<\alpha$ (можна взяти за r достатньо далеке десяткове наближення числа α). Тоді

$$f(\alpha)=f(r)+f(\alpha-r)=rf(1)+f(\alpha-r)\ge$$

$$\ge rf(1)\ge(\alpha-\delta)f(1).$$

Оскільки δ може бути як завгодно малим числом, то робимо висновок, що

$$f(\alpha)\ge\alpha f(1).$$

Так само можна побудувати раціональне число, що наближає α зверху, і аналогічно одержимо (проведіть ці міркування!)

$$f(\alpha)\le\alpha f(1).$$

Тоді не тільки для раціональних r, але й для ірраціональних α виконується рівність (5.5). ∎

Виникає питання: як влаштовані нелінійні розв'язки функціонального рівняння Коші? Та чи є такі розв'язки? Існування нелінійних розв'язків довести досить непросто. Виявляється, усі такі розв'язки (а їх у деякому сенсі набагато більше, ніж лінійних) мають досить патологічну будову. Нам знадобиться одна важлива властивість ірраціональних чисел.

Теорема 2. *Для довільного ірраціонального числа α в кожному інтервалі $(a; b)$ знайдуться числа виду $m\alpha - n$, де n, m — натуральні числа.*

Цю теорему називають теоремою Кронекера за ім'ям видатного німецького математика Леопольда Кронекера (1823–1891), фахівця з алгебри, теорії чисел і теорії функцій. Л.Кронекер важав, що математику варто звести до арифметики натуральних чисел.

Доведення теореми 2 наведено в статті К. Г. Банкова «Об одной теореме Кронекера» (Квант. – 1986.– № 7.– С. 5–7).

Теорема 3. *Нехай f — нелінійний розв'язок рівняння Коші. Тоді в кожному інтервалі дійсної прямої f набуває як завгодно великих значень.*

Доведення

Достатньо розглянути лише інтервал (0; 1) (чому?). З теореми 1 випливає, що f не може бути монотонною функцією. Тоді знайдуться такі числа x_i, $1 \le i \le 4$, що

$$x_1 < x_2,\ x_3 < x_4,\ f(x_1) < f(x_2),\ f(x_3) > f(x_4).$$

Покладемо

$$h_1 = x_2 - x_1 > 0,\ h_2 = x_4 - x_3 > 0.$$

Маємо

$$f(h_1) = f(x_2) - f(x_1) > 0,\ f(h_2) = f(x_4) - f(x_3) < 0.$$

Відзначимо, що функція f задовольняє співвідношення (5.4), оскільки в доведенні теореми 1 до цього ніде не використовувалася монотонність. Отже, $\frac{h_2}{h_1} \notin \mathbf{Q}$ (якщо це не так, то $f(h_2) = f(h_1) \cdot \left(\frac{h_2}{h_1}\right)$, і значення функції f у точках h_1, h_2 мають однаковий знак). Для натуральних n, m одержуємо

$$f(nh_1 - mh_2) = nf(h_1) + m\left(-f(h_2)\right) \ge nf(h_1).$$

Залишилося показати, що для кожного N знайдуться такі номери $n > N$, $m \geq 1$, що

$$0 < nh_1 - mh_2 < 1,$$

або

$$0 < n - m\frac{h_2}{h_1} < \frac{1}{h_1}.$$

Існування таких номерів випливає з ірраціональності відношення $\frac{h_2}{h_1}$ і теореми Кронекера. ◆

Розглянемо кілька функціональних рівнянь, які зводяться до рівняння Коші.

Задача 1. Функція f визначена на інтервалі $(0;+\infty)$, монотонна і при всіх додатних x і y

$$f(xy) = f(x) + f(y). \qquad (5.6)$$

Описати всі такі функції.

Розв'язання

Рівняння (5.6) перепишемо у вигляді

$$f\left(e^{\ln x + \ln y}\right) = f\left(e^{\ln x}\right) + f\left(e^{\ln y}\right).$$

Зробимо заміну $u = \ln x$, $v = \ln y$. Для всіх дійсних u і v маємо:

$$f\left(e^{u+v}\right) = f\left(e^{u}\right) + f\left(e^{v}\right).$$

Введемо нову функцію

$$g(u) = f\left(e^{u}\right), \ u \in \mathbf{R}.$$

Ця функція задовольняє рівняння

$$g(u+v) = g(u) + g(v), \ u \in \mathbf{R}, \ v \in \mathbf{R},$$

і є монотонною як композиція двох монотонних функцій. За теоремою 1 функція g є лінійною, тобто при деякому $C \in \mathbf{R}$

$$g(u) = Cu, \ u \in \mathbf{R}.$$

Звідси

$$f\left(e^{u}\right) = Cu,$$

або

$$f(x) = C\ln x, \ x > 0. \ ◆$$

Задача 2. Побудувати хоча б одну таку зростаючу функцію f, задану на $\mathbb{R}$, що при будь-якому $x \in \mathbb{R}$

$$f(x^2) = (f(x))^4. \tag{5.7}$$

Розв'язання

Побудуємо спочатку функцію f, якщо $x \in [0; +\infty)$. З рівності (5.7) випливає, що $f(0) \geq 0$, і внаслідок зростання f при $x > 0$ маємо $f(x) > f(0) \geq 0$, звідки $f(x) > 0$. Тепер можемо при додатних x прологарифмувати рівність (5.7). Маємо

$$\ln f(x^2) = 4 \ln f(x). \tag{5.8}$$

Розглянемо більш звужену область зміни аргументу: $x \geq 1$. З рівності (5.7) і додатності значення $f(1)$ випливає $f(1) = 1$, звідки внаслідок зростання f отримуємо $\ln f(x) > 0$, $x > 1$. Добудемо корінь з обох частин рівності (5.8). Маємо

$$\sqrt{\ln f(x^2)} = 2\sqrt{\ln f(x)}, \; x \geq 1.$$

Введемо нову функцію

$$g(x) = \sqrt{\ln f(x)}, \; x \geq 1.$$

Тоді

$$g(x^2) = 2g(x), \; x \geq 1; \tag{5.9}$$

$$g(1) = 0, \; g(x) > 0, \; x > 1. \tag{5.10}$$

Зазначимо, що коли в рівнянні (5.6) покласти $y = x$, то одержимо рівняння (5.9). Відповідно до розв'язання задачі 1 співвідношення (5.9), (5.10) задовольняє, зокрема, функція

$$g(x) = \ln x, \; x > 1.$$

Звідси

$$f(x) = e^{g^2(x)} = e^{\ln^2 x} = x^{\ln x}, \; x \geq 1. \tag{5.11}$$

Розглянемо тепер область $x \in (0; 1)$. Міркування в цьому випадку аналогічні. Зі зростання функції f і рівності $f(1) = 1$ випливає, що $\ln f(x) < 0$, $0 < x < 1$. Рівність (5.8) тоді можна перетворити до вигляду

$$\sqrt{-\ln f(x^2)} = 2\sqrt{-\ln f(x)}, \; 0 < x < 1.$$

Введемо допоміжну функцію

$$h(x)=\sqrt{-\ln f(x)},\quad 0<x\le 1.$$

Тоді

$$h\left(x^2\right)=2h(x),\ h(1)=0,\ h(x)>0;\ x\in(0;1).$$

Знову скористаємося задачею 1. Якщо $x\in(0;1)$, $\ln x<0$, можна покласти $h(x)=-\ln x$, звідси

$$f(x)=e^{-\ln^2 x}=x^{-\ln x}=x^{|\ln x|},\quad 0<x<1. \qquad (5.12)$$

Легко бачити, що функція f, задана рівностями (5.11), (5.12), зростає на $(0;+\infty)$. Нарешті, з умови задачі випливає непарність f (чому?). Продовжуючи побудовану функцію непарним чином на інтервалі $(-\infty;0)$ і покладаючи $f(0)=0$, остаточно маємо:

$$f(x)=\begin{cases}(\operatorname{sign}x)\,|x|^{|\ln|x||}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Тут $\operatorname{sign}x$ є функцією знака числа, а саме

$$\operatorname{sign}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що знайдена функція задовольняє умову (5.7). ◀

Завдання 1. Функція f монотонна в точці $x=1$ і задовольняє рівняння Коші. Довести, що f є лінійною функцією виду (5.2).

Завдання 2. Побудувати хоча б одну таку зростаючу і нелінійну функцію f, що при будь-якому $x\in\mathbf{R}$

$$f(2x)=2f(x).$$

Вказівка. Задайте f на проміжку $[1;2)$ і побудуйте продовження цієї функції на всю числову вісь.

Завдання 3. Знайти всі монотонні функції f, що задовольняють співвідношення $f(x+y)=f(x)f(y)$, де x і y – довільні дійсні числа.

Завдання 4. Знайти всі спадні функції f, що при кожних дійсних x, y задовольняють співвідношення

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+1.$$

Вказівка. Розгляньте функцію $f(x)+1$.

Завдання 5. Функція f монотонна в нулі, $f(0)=0$, і при всіх дійсних x і y

$$f(x+y)\le f(x)+f(y).$$

Довести, що f є монотонною функцією. Чи є умова $f(0)=0$ необхідною для виконання цього твердження?

Вказівка. Так, є. Покажіть, що будь-яка функція, у якої область значень належить відрізку $[1; 2]$, задовольняє дану нерівність.

Завдання 6*. Нехай f – нелінійний розв'язок рівняння Коші. Довести, що графік f щільно заповнює всю площину. А саме: у кожному крузі на декартовій площині знайдеться хоча б одна точка графіка.

Вказівка. Впишіть у круг квадрат. Нехай $[x_1; x_2]$ – його проекція на вісь абсцис. За теоремою 3 побудуйте такі числа $\{\alpha, \beta\}\subset[x_1; x_2]$, що $f(\alpha)\ge N$, $f(\beta)\le -N$, де N – фіксоване натуральне число. Шукайте абсцису у вигляді суми $p\alpha+q\beta$, де $p+q=1$, $p>0$, $q>0$, $\{p, q\}\subset\mathbf{Q}$.

РОЗДІЛ IV. МОНОТОННІСТЬ І ПОХІДНА

§ 1. Критерії монотонності

Диференціальне числення значно полегшує дослідження функції на монотонність. Розглянемо довільний інтервал $(a; b)$ – скінченний або нескінченний.

***Теорема* 1.** *Нехай на $(a; b)$ задано диференційовну функцію f. Для того, щоб вона не спадала, необхідно і достатньо, щоб для кожного $x \in (a; b)$ похідна $f'(x) \geq 0$.*

Доведення

Достатність. Розглянемо довільний відрізок $[x_1; x_2] \subset (a; b)$. За теоремою Лагранжа

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\theta)(x_2 - x_1),$$

де θ – деяка точка відкритого проміжку $(x_1; x_2)$. Але за умовою $f'(\theta) \geq 0$, крім того, $x_2 - x_1 > 0$, тому $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$. Звідси $f(x_1) \leq f(x_2)$, і функція f є неспадною.

Необхідність. Нехай f не спадає на $(a; b)$. Зафіксуємо $x_0 \in (a; b)$. Тоді

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (1.1)$$

Якщо $\Delta x > 0$, то $f(x_0 + \Delta x) \geq f(x_0)$.

Якщо $\Delta x < 0$, то $f(x_0 + \Delta x) \leq f(x_0)$.

Тому вираз під знаком границі невід'ємний. З формули (1.1) за властивостями границі функції, випливає шукана нерівність $f'(x_0) \geq 0$.



Примітка. Під час доведення було використано теорему, названу за ім'ям видатного французького математика і механіка Жозефа Луї Лагранжа (1736–1813), автора фундаментальних робіт з математичного аналізу, теорії диференціальних рівнянь, варіаційного числення, алгебри і теорії чисел.

Якщо функція визначена на проміжку $[a; b)$ (тут a – скінченне число), то має місце аналогічне твердження.

Наслідок 1. *Нехай на* $[a; b)$ *задано неперервну функцію* f, *диференційовну в усіх точках інтервалу* $(a; b)$. *Для того, щоб вона не спадала, необхідно і достатньо, щоб для кожного* $x \in (a; b)$ *похідна*

$$f'(x) \geq 0. \tag{1.2}$$

Доведення

Необхідність випливає з неспадання f на $(a; b)$ і теореми 1. Доведемо достатність. Нехай виконується умова (1.2). Тоді за теоремою 1

$$f(x_1) \leq f(x_2), \text{ якщо } a < x_1 < x_2 < b. \tag{1.3}$$

Залишається перевірити нерівність $f(a) \leq f(x_2)$, $x_2 \in (a; b)$. Її легко отримати з (1.3), якщо спрямувати x_1 до a і використати те, що внаслідок неперервності f у точці a виконується рівність

$$\lim_{x_1 \to a} f(x_1) = f(a).$$

Розглянемо умови строгої монотонності. Приклад зростаючої функції

$$g_0(x) = x^3, \; x \in (-\infty; +\infty), \tag{1.4}$$

показує, що для зростання g на $(a; b)$ не обов'язково, щоб похідна g' була додатною на $(a; b)$. ◆

Теорема 2. *Нехай функція* f *диференційовна на* $(a; b)$. *Для того, щоб вона зростала, необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови*:

1) $f'(x) \geq 0$, $x \in (a; b)$;

2) $f'(x)$ не є тотожним нулем на жодному інтервалі $(\alpha; \beta) \subset (a; b)$.

Доведення

Необхідність. Нехай f зростає. Тоді f не спадає на $(a; b)$, і перша умова виконується за теоремою 1. Другу умову доведемо методом від супротивного. Припустимо, що на деякому інтервалі $(\alpha; \beta) \subset (a; b)$ похідна $f'(x) \equiv 0$. Тоді f як первісна від тотожного

нуля є сталою на $(\alpha;\beta)$. Отже, f не є зростаючою. Одержали суперечність з умовою. Необхідність доведено.

Достатність. Нехай умови 1) і 2) виконуються. Тоді за теоремою 1 f не спадає, і для кожної пари точок $x_1 < x_2$ виконується нерівність $f(x_1) \le f(x_2)$. Припустимо, що при деяких $x_1 < x_2$

$$f(x_1) = f(x_2).$$

Тоді для всіх $x \in (x_1; x_2)$

$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2); \qquad f(x) = f(x_1) = f(x_2).$$

Отже, функція f на $[x_1; x_2]$ є сталою, її похідна

$$f'(x) = 0,\ x \in [x_1; x_2],$$

що неможливо внаслідок умови 2). Одержали суперечність. Отже,

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ при } x_1 < x_2. \blacksquare$$

Завдання 1. Довести такий наслідок теореми 2. Нехай f – неперервна функція на $[a; b)$, диференційовна в точках відкритого проміжку $(a; b)$. Для того, щоб f зростала, необхідно і достатньо, щоб виконувалися обидві умови теореми 2.

Завдання 2. Сформулювати твердження, аналогічні теоремам 1–2, для незростаючих функцій.

Повертаючись, наприклад, до рівності (1.4), бачимо, що $g'(x) = 3x^2 \ge 0$; $g'(x) = 0$ лише у точці $x = 0$, і обидві умови теореми 2 виконані. Не дивно, що g зростає.

З теореми 2 випливає, зокрема, що додатність похідної функції на $(a; b)$ спричинює її зростання на цьому проміжку. Здається, що більш того, додатність $f'(x)$ у точці x_0 спричинює зростання f у точці x_0 (див. означення 1 § 5, р. III), тобто зростання в деякому околі $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$. Однак це не завжди так.

Приклад 1. Функція

$$f(x)=\begin{cases} x+x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0 \end{cases}$$

диференційовна на всій області визначення, її похідна $f'(0)=1>0$, однак f не монотонна в точці 0.

Доведемо це. За теоремою про похідну суми, добутку функцій і складної функції похідна $f'(x)$, якщо $x\neq 0$, існує і дорівнює

$$f'(x)=1+2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}.$$

Коли $x=0$, знайдемо похідну за означенням. Маємо:

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h+h^2\sin\dfrac{1}{h^2}-0}{h}=$$

$$=1+\lim_{h\to 0}h\sin\frac{1}{h^2}=1.$$

Обчислюючи останню границю, ми скористалися обмеженістю синуса $\left(\left|\sin\dfrac{1}{h^2}\right|\le 1\right)$ і тією властивістю, що добуток обмеженої функції на функцію, що прямує до 0, також прямує до 0.

Нехай f монотонна в деякому інтервалі $(-\delta;\delta)$, $\delta>0$. Тоді за теоремою 1 та завданням 2 похідна f' не може набувати на цьому відкритому проміжку двох значень різних знаків. Проте такі значення неважко побудувати.

Справді, $\cos\dfrac{1}{x^2}=1$, якщо $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}$, $n\in\mathbf{N}$. При цих значеннях аргументу $\sin\dfrac{1}{x^2}=0$, звідси

$$f'\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\right)=1\mp 2\sqrt{2\pi n}.$$

Виберемо таке n_0, щоб

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi n_0}} < \delta;\ n_0 > \frac{1}{2\pi\delta^2}.$$

Тоді

$$f'\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi n_0}}\right) = 1 - 2\sqrt{2\pi n_0} \le 1 - 2\sqrt{2\pi} < 0; \qquad (1.5)$$

$$f'\left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi n_0}}\right) = 1 + 2\sqrt{2\pi n_0} > 0. \qquad (1.6)$$

Отже, вказано дві точки з інтервалу $(-\delta; \delta)$, у яких похідна f' набуває значень різних знаків, що суперечить умові монотонності. Виходить, f не є монотонною в точці 0.

Причиною такого явища є сильні коливання похідної $f'(x)$ при наближенні до точки 0: як бачимо з виразів (1.5), (1.6), у будь-якому околі нуля похідна набуває як завгодно великих за абсолютною величиною додатних і від'ємних значень.

Завдання 3. Якщо функція f має неперервну похідну на $(a; b)$ і в деякій точці $x_0 \in (a; b)$ $f'(x_0) > 0$, то f зростає в точці x_0. Довести.

У теоремах 1–2 припускалася диференційовність заданої функції і досліджувалися умови її монотонності. Виявляється, монотонна функція диференційовна в багатьох точках її області визначення – незалежно від того, неперервна вона чи ні. Точніше, справедливе наступне твердження.

Теорема 3. *Якщо f монотонна на $(a; b)$, то в кожному інтервалі $(\alpha; \beta) \subset (a; b)$ існує хоча б одна точка, у якій f диференційовна.*

Завдання 4. Вивести з теореми 3 наступне твердження: якщо f монотонна на $(a; b)$, то в кожному інтервалі $(\alpha; \beta) \subset (a; b)$ існує нескінченно багато точок, у яких f диференційовна.

Завдання 5. Перевірити безпосередньо, що твердження теореми 3 виконується для монотонної функції

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in(-\infty;\,0],\\ \dfrac{1}{2^{i-1}}, & x\in\left(\dfrac{1}{2^{i}};\,\dfrac{1}{2^{i-1}}\right],\end{cases} i\in\mathbf{Z}.$$

Завдання 6*. Довести, що кожний многочлен можна подати у вигляді різниці двох зростаючих многочленів.

Вказівка. Якщо p – многочлен степеня не вище $2n+1$, то при достатньо великих a многочлен $ax^{2n+1}+p(x)+ax$ зростає на $\mathbf{R}$.

§ 2. Дослідження функцій на монотонність за допомогою похідної

Покажемо на кількох прикладах, як використовуються результати § 1 для знаходження інтервалів монотонності. Читачеві рекомендуємо щоразу будувати ескіз графіка досліджуваної функції.

Приклад 1. Розглянемо неперервну функцію

$$f(x)=x^3+|x|,\ x\in\mathbf{R}.$$

При $x\ge 0$ вона зростає як сума двох зростаючих на $[0;+\infty)$ функцій. При $x<0$ за властивостями модуля маємо

$$f(x)=x^3-x,\ f'(x)=3x^2-1.$$

Розглянемо допоміжне рівняння

$$3x^2-1=0,\ x<0.$$

Звідси $x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

При $x<-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ похідна $f'(x)>0$, і, згідно із завданням 1 § 1, f зростає на $\left(-\infty;-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

При $x\in\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}};0\right)$ похідна $f'(x)<0$, і тому f спадає на $\left[-\dfrac{1}{\sqrt{3}};0\right]$.

Остаточно маємо: f зростає на $\left(-\infty;-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$, спадає на $\left[-\dfrac{1}{\sqrt{3}};0\right]$ і зростає на $[0;+\infty)$.

Приклад 2. Розглянемо неперервну функцію

$$f(x)=\frac{x}{1+x}-\ln(1+x),\quad x>-1.$$

Обчислюючи похідну, одержуємо

$$f'(x)=\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{1+x}=-\frac{x}{(1+x)^2}.$$

Звідси $f'(x)>0$ при $x<0$, і f зростає на $(-1;\,0]$, $f'(x)<0$ при $x>0$, і f спадає на $[0;\,+\infty)$.

Приклад 3. Дослідимо монотонність функції

$$g(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x,\quad x\in(-\infty;\,-1)\cup(0;\,+\infty).$$

Маємо $g(x)=e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=e^{x(\ln(x+1)-\ln x)}$. Враховуючи монотонність експоненти, ця функція є монотонною тоді і тільки тоді, коли монотонна функція $h(x)=x(\ln(x+1)-\ln x)$. При цьому згідно з теоремою 4 і завданням 5 § 2 р. III характери монотонності функцій h і g однакові. Маємо:

$$h'(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+x\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}.$$

Ця похідна виражається через функцію f з прикладу 2 за допомогою заміни $\frac{1}{x}=t$. Тоді

$$h'(x)=\ln(1+t)-\frac{t}{1+t}=-f(t).$$

Вище показано, що $f(t)$ зростає на $(-1;\,0]$, і тому $f(t)<f(0)=0$, коли $t=\frac{1}{x}\in(-1;\,0)$, тобто $x<-1$. Отже, для таких x $h'(x)=-f(t)>0$.

Далі, $f(t)$ спадає на $[0;\,+\infty)$, і тому $f(t)<f(0)=0$, коли $t=\frac{1}{x}>0$, тобто $x>0$. Отже, для таких x знову $h'(x)=-f(t)>0$. Тому

h, а отже і g, зростає на кожному з проміжків $(-\infty; -1)$ і $(0; \infty)$. Проте g не є монотонною на всій області визначення, оскільки $g(-2) = 4 > g(1) = 2$.

Завдання 1. Дослідити на монотонність функції:

а) $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$, $x \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$;

б) $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$, $x \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$.

Приклад 4. Нехай

$$f(x) = e^{4x} \operatorname{tg} x, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \; n \in \mathbf{Z}.$$

Маємо

$$f'(x) = e^{4x}\left(4\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos^2 x}\right) = \frac{e^{4x}}{\cos^2 x}(2\sin 2x + 1).$$

Рівняння $f'(x) = 0$ приводить до тригонометричного рівняння

$$\sin 2x = -\frac{1}{2}; \; x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}n, \; n \in \mathbf{Z}.$$

Розглядаючи тригонометричне коло, неважко дійти висновку, що

$$\sin 2x > -\frac{1}{2}, \text{ якщо } -\frac{\pi}{12} + \pi n < x < \frac{7\pi}{12} + \pi n, \; n \in \mathbf{Z};$$

$$\sin 2x < -\frac{1}{2}, \text{ якщо } -\frac{5\pi}{12} + \pi n < x < -\frac{\pi}{12} + \pi n, \; n \in \mathbf{Z}.$$

Отже, f зростає на кожному з проміжків $\left[-\frac{\pi}{12} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{7\pi}{12} + \pi n\right]$, $n \in \mathbf{Z}$, і функція f спадає на кожному з проміжків $\left[-\frac{5\pi}{12} + \pi n; -\frac{\pi}{12} + \pi n\right]$, $n \in \mathbf{Z}$.

При цьому проміжки зростання не можна об'єднувати, адже при жодному цілому n функція f не є монотонною на множині

$$\left[-\frac{\pi}{12}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{7\pi}{12}+\pi n\right],$$

оскільки $f\left(\frac{\pi}{4}+\pi n\right)>0$, $f\left(\frac{7\pi}{12}+\pi n\right)<0$.

Завдання 2. Позначимо через $x_n=\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, абсциси точок перетину графіка функції $f(x)=e^x\cos x$ з графіками $y=\pm e^x$. Чи правильно, що функція f монотонна на кожному з проміжків $[x_n;x_{n+1}]$, $n\in\mathbf{Z}$? Дати геометричну ілюстрацію.

Завдання 3. Дослідити на монотонність функцію

$$f(x)=\cos x\cdot e^{\sin x},\quad x\in\mathbb{R}.$$

Приклад 5. При фіксованому натуральному n дослідимо функцію

$$f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}-...+(-1)^n\frac{x^n}{n},\quad x>-1.$$

Маємо:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x-x^2+...+(-1)^n x^{n-1}.$$

Користуючись формулою суми n членів геометричної прогресії, одержуємо:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{(-1)\left(1-(-x)^n\right)}{1-(-x)}=\frac{(-1)^n x^n}{1+x}.$$

Досліджуючи знак похідної, робимо висновок, що при парному n функція f зростає на $(-1;+\infty)$, а при непарному n функція f зростає на $(-1;0]$ і спадає на $[0;+\infty)$.

Завдання 4. Нехай $k\in\mathbf{N}$. Довести нерівності:

а) $\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$, де $x>-1$, $x\neq 0$;

б) $\ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...-\frac{x^{2k}}{2k}$, де $x>0$.

У деяких випадках монотонність досліджується за індукцією.

Приклад 6. При фіксованому натуральному n розглянемо функцію

$$f_n(x)=e^x-1-x-\frac{x^2}{2!}-\ldots-\frac{x^n}{n!},\quad x\geq 0. \qquad (2.1)$$

Методом математичної індукції доведемо, що f_n зростає.

Якщо $n=1$,

$$f_1(x)=e^x-1-x;\ f_1'(x)=e^x-1>0 \text{ при } x>0,$$

і згідно із завданням 1 § 1 f_1 зростає.

Нехай f_k зростає при деякому $k\geq 1$. Доведемо, що f_{k+1} також зростає. Справді,

$$f_{k+1}'(x)=e^x-1-\frac{2x}{2!}-\frac{3x^2}{3!}-\ldots-\frac{(k+1)x^k}{(k+1)!}=$$

$$=e^x-1-x-\frac{x^2}{2!}-\ldots-\frac{x^k}{k!}=f_k(x).$$

За припущенням індукції, якщо $x>0$, то $f_k(x)>f_k(0)=0$, і тому $f_{k+1}'(x)>0$ при $x>0$. Отже, f_{k+1} також зростає.

За принципом математичної індукції наше твердження справедливе для кожного натурального n.

Завдання 5. Дослідити на монотонність функцію $f_n(x)$, задану виразом (2.1) і визначену при $x\leq 0$.

Завдання 6. При фіксованому натуральному n дослідити на монотонність функції:

а) $g_n(x)=\sin x-x+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ x\in\mathbf{R}$;

б) $h_n(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{(2n)!},\ x\in\mathbf{R}$.

Завдання 7. Дослідити на монотонність функції:

а) $f_1(x)=\ln x-x-\frac{2}{x},\ x>0$;

б) $f_2(x)=\left|x^3-3x^2\right|,\ x\in\mathbf{R}$;

в) $f_3(x)=|x+5|e^x,\ x\in\mathbf{R}$;

г) $f_4(x)=\frac{3x+1}{x^3-1},\ x\neq 1$.

Завдання 8. Довести, що функція

$$f(x)=\frac{\ln^{100} x}{x},\ x>0,$$

спадає на деякому проміжку вигляду $[x_0;+\infty)$, $x_0>0$.

Завдання 9. Знайти екстремуми і вказати проміжки монотонності функції $f(x)=\frac{2^x}{x}$, $x\neq 0$. Побудувати графік функції. Скільки коренів має рівняння $\frac{2^x}{x}=a$ залежно від параметра a?

(Задача пропонувалася на вступних іспитах на механіко-математичний факультет Київського державного університету ім. Тараса Шевченка в 1979 р.).

§ 3. Застосування поняття монотонності до доведення нерівностей

Визначивши інтервали монотонності заданої функції, можна знайти її точки екстремуму. Цей прийом часто використовується для доведення нерівностей.

Задача 1. Нехай x, a, b – додатні числа. Довести, що

$$x^a+\frac{1}{x^b}\geq\frac{a+b}{a^{\frac{a}{a+b}}\cdot b^{\frac{b}{a+b}}}.$$

Розв'язання

При фіксованих a і b дослідимо на монотонність функцію

$$f(x)=x^a+\frac{1}{x^b},\ x>0.$$

Маємо:

$$f'(x)=ax^{a-1}-\frac{b}{x^{b+1}}.$$

Похідна дорівнює нулю в точці $x_0=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{a+b}}$.

Якщо $0<x<x_0$, то $f'(x)<0$; якщо ж $x>x_0$, то $f'(x)>0$. Отже, f спадає на $(0;x_0]$ і зростає на $[x_0;+\infty)$. У точці x_0 функція набуває найменшого значення і при всіх $x>0$

$$f(x)\geq f(x_0)=x_0^a+\frac{1}{x_0^b}=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{a}{a+b}}+\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{b}{a+b}}=\frac{a+b}{a^{\frac{a}{a+b}}\cdot b^{\frac{b}{a+b}}}.$$

Якщо числа a та b сумірні ($\frac{a}{b}\in \mathbb{Q}$), то дану нерівність можна вивести зі співвідношення між середніми арифметичним і геометричним (як?).

Цікаво, що права частина отриманого співвідношення симетрична відносно параметрів a та b. Спробуйте це пояснити, тобто чому є однаковими найменші значення функцій f і $g(x)=x^b+x^{-a}$, $x>0$.

Задача 2. Нехай $x>1$. Довести нерівність $2x\ln x+1<x^2$.

Розв'язання

Дослідимо на монотонність функцію

$$f(x)=2x\ln x+1-x^2,\ x\geq 1.$$

Похідна

$$f'(x)=2(\ln x+1-x).$$

Визначимо знак виразу

$$g(x)=\ln x+1-x,\ x\geq 1.$$

Зауважимо, що $g(1)=0$, і дослідимо на монотонність уже функцію g. Оскільки $g'(x)=\frac{1}{x}-1<0$ для всіх $x>1$, то g спадає на $[1;+\infty)$. Звідси $g(x)<g(1)=0$.

Тому $f'(x)=2g(x)<0$ при $x>1$, і f також спадає на $[1;+\infty)$. Отже, $f(x)<f(1)=0$ при $x>1$.

Задача 3. Довести нерівності:

$$\sin x>x-\frac{x^3}{6},\ \text{де } x>0; \tag{3.1}$$

$$\cos x<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24},\ \text{де } x\in\mathbb{R},\ x\neq 0. \tag{3.2}$$

Розв'язання

Будемо діяти так само, як у задачі 2. Розглянемо функції

$$f(x)=\sin x-x+\frac{x^3}{6},\ x\geq 0;$$

$$g(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\cos x\ \ x\in\mathbb{R}.$$

Тоді

$$f'(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2},\ f''(x)=-\sin x+x.$$

За відомою нерівністю $f''(x)>0$ при $x>0$. Тому $f'(x)$ зростає на $[0;+\infty)$. Звідси $f'(x)>f'(0)=0$. Отже, функція f зростає і $f(x)>f(0)=0$ при $x>0$.

Нерівність (3.1) встановлено. ∎

Для доведення нерівності (3.2) достатньо помітити, що g – парна функція і $g'(x)=f(x)>0$ при $x>0$, а $g(0)=0$.

Завдання 1. При фіксованому натуральному n для додатних x довести нерівності

а) $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots-\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!}<\sin x<x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}$;

б) $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots-\frac{x^{4n-2}}{(4n-2)!}<\cos x<1-\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{4n}}{(4n)!}$;

в) $e^x>1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$.

Нерівності у завданні 1, а також у завданні 4 § 2 можуть слугувати джерелом багатьох інших цікавих нерівностей. Наведемо одну з них.

Задача 4. Довести, що коли $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

$$\cos x<\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3. \qquad (3.3)$$

Розв'язання

Згідно з нерівністю (3.1) при x > 0 маємо:

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3>\left(1-\frac{x^2}{6}\right)^3.$$

Із співвідношення (3.2) робимо висновок, що для доведення нерівності (3.3) достатньо довести справедливість нерівності

$$1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{6^3}>1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24},$$

де $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Остання нерівність рівносильна співвідношенню

$$x^2<\frac{6^3}{24}=9,\ x<3.$$

При $x<\frac{\pi}{2}$ це, звичайно, виконується.

Завдання 2. Довести нерівності:

а) $e^x>\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right),\ x\in(0;+\infty)$;

б) $2\ln(1+x)+x\sin x>2x\cos x,\ x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Вказівка. Скористайтеся завданням 4 § 2 і завданням 1.

Розглянемо цікаві нерівності, пов'язані з біноміальною функцією $(1+x)^\alpha$.

Задача 5. Нехай n – фіксоване натуральне число, $\alpha>n$. Довести, якщо $x>0$, то

$$(1+x)^\alpha>1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n. \qquad (3.4)$$

Розв'язання

Введемо функції

$$f_{n,\alpha}(x)=(1+x)^\alpha-1-\alpha x-\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2-\ldots-\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n,$$

$$x\in[0;+\infty),\ n\in\mathbf{N}.$$

Покладемо також

$$f_{0,\alpha}(x)=(1+x)^\alpha-1;\ x\in[0;+\infty).$$

Позначимо через A_n таке твердження: при кожному $\alpha>n$ $f_{n,\alpha}(x)>0$ для всіх $x>0$. Твердження A_n доведемо методом індукції за $n\geq 0$.

Якщо $n=0$, твердження випливає з властивостей степеневої функції. Нехай A_n доведено для деякого $n=k>0$. Доведемо твердження A_{k+1}.

Розглянемо похідну функції $f_{k+1,\alpha}$ при $\alpha > k+1$:

$$f'_{k+1,\alpha}(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha - \alpha(\alpha-1)x - \ldots - \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k)}{k!}x^k = \alpha f_{k,\alpha-1}(x).$$

Якщо $\alpha > k+1$, то $\alpha - 1 > k$, і за припущенням індукції $f_{k,\alpha-1}(x) > 0$, коли $x > 0$. Отже, $f_{k+1,\alpha}$ зростає, звідки при $x > 0$

$$f_{k+1,\alpha}(x) > f_{k+1,\alpha}(0) = 0.$$

Доведена нерівність, якщо $n = 1$ і α — натуральне, є класичною і належить Я.Бернуллі. Якоб Бернуллі (1654–1705) – видатний швейцарський математик. Представник відомої математичної династії Бернуллі. Увів термін «інтеграл». Разом з Йоганном Бернуллі поклав початок варіаційному численню. В області теорії ймовірностей його дослідження були основоположними.

Ця нерівність справедлива не тільки для додатних x, але й коли $x \in (-1; 0)$. Покажемо це, розв'язавши наступну задачу.

Задача 6. Довести, що при $x > -1$, $x \neq 0$, $\alpha > 1$,

$$(1+x)^{\alpha} > 1 + \alpha x. \qquad (3.5)$$

Розв'язання

Розглянемо похідну $f'_{1,\alpha}(x) = \alpha f_{0,\alpha-1}(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha < 0$, якщо $x \in (-1; 0)$. Функція $f_{1,\alpha}$ спадає на $(-1; 0]$. Тоді

$$f_{1,\alpha}(x) = (1+x)^{\alpha} - 1 - \alpha x > f_{1,\alpha}(0) = 0$$

для всіх $x \in (-1; 0)$. При $x > 0$ нерівність (3.4) вже доведено в задачі 5.

Завдання 3. Довести, що, коли $\alpha \in (0; 1)$, у співвідношенні (3.5) знак нерівності зміниться на протилежний.

За допомогою нескладних перетворень з нерівності (3.5) можна вивести низку класичних нерівностей. Вкажемо одну з них.

Задача 7. Нехай $a > 0$, $b > 0$, числа p і q такі, що $0 < p < 1$ і $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Довести, що

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \geq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}. \qquad (3.6)$$

Розв'язання

Якщо $a=b$, одержуємо рівність. Нехай $a\neq b$. Покладемо в (3.5) $\alpha=\frac{1}{p}$, $x=-1+\frac{a}{b}$. При цьому α, x належать проміжкам, указаним у задачі 6.

Маємо

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p}}>1+\frac{1}{p}\left(\frac{a}{b}-1\right),\quad a^{\frac{1}{p}}b^{1-\frac{1}{p}}>\left(1-\frac{1}{p}\right)b+\frac{1}{p}a,$$

$$a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}}\geq\frac{a}{p}+\frac{b}{q}.$$

Цю нерівність називають нерівністю Юнга, за ім'ям англійського математика В.Юнга (Янг) (1882–1946).

Завдання 4. Довести, що при $p<0$ нерівність (3.6) зберігається, а при $p>1$ знак нерівності змінюється на протилежний.

Завдання 5. Довести, використовуючи метод математичної індукції, що при $\alpha=n$, $x\in\mathbb{R}$, співвідношення (3.4) перетворюється на тотожність.



Примітка. Це є так звана формула бінома Ньютона. Ісаак Ньютон (1643–1727) – видатний англійський фізик, механік, астроном і математик. Сформулював основні закони класичної механіки, відкрив закон всесвітнього тяжіння, розробив (одночасно з Лейбніцем) основи диференціального й інтегрального числення.

Завдання 6. Дослідити знак нерівності в (3.4) при $-1<x<0$.

Завдання 7. Нехай $x>0$. Довести, що, коли $\alpha\in(n-1;n)$, у нерівності (3.4) знак змінюється на протилежний, при $\alpha\in(n-2;n-1)$ нерівність (3.4) виконується, при $\alpha\in(n-3;n-2)$ знак знову змінюється на протилежний і т.д. При $\alpha<0$ у випадку непарного n співвідношення (3.4) справедливе, а у випадку парного n знак нерівності змінюється на протилежний.

Доведені нерівності, що порівнюють логарифмічну, показникову, тригонометричну і біноміальну функції з многочленами, можуть використовуватися в наближених обчисленнях.

Приклад 1. Обчислити $\ln 1{,}1$ з точністю до 10^{-3}.

Розв'язання

Згідно із завданням 4 § 2 мають місце нерівності

$$0{,}1-\frac{0{,}01}{2}<\ln(1+0{,}1)<0{,}1-\frac{0{,}01}{2}+\frac{0{,}001}{3},$$

звідки

$$0{,}095<\ln 1{,}1<0{,}095+4\cdot 10^{-4}.$$

Отже, з точністю $4\cdot 10^{-4}$

$$\ln 1{,}1\approx 0{,}095.$$

Завдання 8. Обчислити з точністю до 10^{-3}: $\sqrt[3]{2}$, $\sin 2$, $\cos 3$.

Завдання 9. Довести ірраціональність числа e, дослідивши на монотонність функцію

$$e^x-1-x-\frac{x^2}{2!}-\ldots-\frac{x^n}{n!},\ x\le 0,$$

Вказівка. Побудуйте раціональні наближення числа e^{-1}.

Завдання 10. Яке з чисел більше: $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{3}}$ чи $\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}$?

Вказівка. Дослідіть на монотонність функцію $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, $x>0$.

Завдання 11. Довести, що для $x>0$, $y>0$ має місце нерівність

$$x^y e^{-x}\le y^y e^{-y}.$$

§ 4. Застосування поняття монотонності до розв'язування рівнянь

Дослідження на монотонність допомагає під час розв'язування нестандартних рівнянь, коли легко можна вгадати кілька коренів і залишається тільки довести, що інших коренів немає.

Задача 1. Розв'язати рівняння

$$\left(2+\sqrt{2}\right)^x+\left(2-\sqrt{2}\right)^x=2^{-x}. \qquad (4.1)$$

Розв'язання

Покажемо, що число $x=-1$ є коренем рівняння. Справді,

$$\frac{1}{2+\sqrt{2}}+\frac{1}{2-\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}+2+\sqrt{2}}{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}=\frac{4}{4-2}=2.$$

Доведемо, що інших коренів немає. Помножимо обидві частини рівняння (4.1) на додатне число 2^x. Одержуємо рівносильне рівняння

$$\left(2\left(2+\sqrt{2}\right)\right)^x+\left(2\left(2-\sqrt{2}\right)\right)^x=1.$$

Розглянемо функцію $f(x)=\left(2\left(2+\sqrt{2}\right)\right)^x+\left(2\left(2-\sqrt{2}\right)\right)^x$, $x\in\mathbf{R}$.

Функція f є сумою двох показникових функцій з основами, більшими за 1, і тому зростає. Тоді при $x>-1$ маємо $f(x)>f(-1)=1$, а при $x<-1$ виконується нерівність $f(x)<f(-1)=1$. Отже, число (-1) є єдиним коренем рівняння.

Завдання 1. Розв'язати рівняння

$$\left(5+\sqrt{7}\right)^x+\left(5-\sqrt{7}\right)^x=8^x.$$

Задача 2. Розв'язати рівняння $4^x=1+2x$.

Розв'язання

Легко бачити, що числа $x_1=0$ і $x_2=\frac{1}{2}$ є коренями рівняння. Доведемо, що інших коренів немає. Дослідимо функцію

$$f(x)=4^x-2x-1,\ x\in\mathbf{R}.$$

Маємо $f'(x)=4^x\ln 4-2$. Критична точка $x_0=\log_4\frac{2}{\ln 4}$.

Неважко перевірити, що нерівність

$$0<\log_4\frac{2}{\ln 4}<\frac{1}{2}$$

рівносильна правильній нерівності $2<e<4$, і тому $x_0\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

Функція f зростає на $(-\infty;x_0]$ і спадає на $[x_0;+\infty)$. Тому, якщо $x<0$, то $f(x)<f(0)=0$; якщо $x\in(0;x_0]$, то $f(x)>f(0)=0$; якщо $x\in\left(x_0;\frac{1}{2}\right)$, то $f(x)>f\left(\frac{1}{2}\right)=0$; якщо же $x>\frac{1}{2}$, то $f(x)<f\left(\frac{1}{2}\right)=0$.

Отже, $f(x)=0$ тільки в точках x_1 і x_2.

Завдання 2*. Нехай $a > 1$, p_n – многочлен степеня n. Довести, що рівняння $a^x = p_n(x)$ має не більше ніж $n + 1$ корінь.

Вказівка. Скористайтеся індукцією за n. Здійснюючи крок індукції, припустіть, що існує щонайменше $n + 1$ корінь, і досліджуйте на монотонність функцію $f(x) = a^x - p_n(x)$.

Завдання 3. Розв'язати рівняння

$$2^x = \frac{x^2}{3} + \frac{5}{6}x + 1.$$

Розглянемо тепер рівняння з двома невідомими.

Задача 3. Розв'язати рівняння

$$2\operatorname{arctg} x = |x| + |y-1| + \left|y - \frac{\pi}{2}\right|.$$

Розв'язання

Розглянемо функції

$$f(x) = 2\operatorname{arctg} x - |x|, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$g(y) = |y-1| + \left|y - \frac{\pi}{2}\right|, \quad y \in \mathbf{R}.$$

Дане рівняння запишемо у вигляді

$$f(x) = g(y). \tag{4.2}$$

Дослідивши f на монотонність, доходимо висновку, що f зростає на $(-\infty; 1]$ і спадає на $[1; +\infty)$ (перевірте!), і тому для всіх x

$$f(x) \le f(1) = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Разом з цим, $g(y)$ є сумою відстаней між точками y та 1, y та $\frac{\pi}{2}$.

Тому $g(y) \ge \frac{\pi}{2} - 1$.

Рівняння (4.2) рівносильне системі

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\pi}{2} - 1, \\ g(y) = \frac{\pi}{2} - 1. \end{cases}$$

Звідси одержуємо розв'язок: $x=1,\ y\in\left[1;\frac{\pi}{2}\right]$. ◀

Завдання 4. Вказати всі x та y, що задовольняють рівняння

$$\frac{\ln x}{x}=e^{\cos y}.$$

(Задача пропонувалася на вступних іспитах на механіко-математичний факультет Київського державного університету ім. Тараса Шевченка в 1979 р.)

Завдання 5. Розв'язати рівняння

$$|x|-2x^4=\frac{3}{8}e^{\cos^2 x}.$$

§ 5. Застосування монотонних функцій для дослідження послідовностей на монотонність

Як відомо, послідовність є функцією натурального аргументу. Якщо послідовність задано явно, часто вдається перейти до неперервного аргументу і звести питання про її монотонність до вивчення монотонності функції, заданої на деякому проміжку.

Приклад 1. Розглянемо послідовність

$$a_n=ne^{-\frac{n^2}{18}},\quad n\geq 1.$$

Введемо функцію

$$f(x)=xe^{-\frac{x^2}{18}},\quad x\in[1;+\infty).$$

Дослідимо її на монотонність. Маємо:

$$f'(x)=e^{-\frac{x^2}{18}}\left(1-\frac{x^2}{9}\right),\quad x\geq 1.$$

Критична точка $x_0=3$. Якщо $x\in[1;3)$, $f'(x)>0$ і функція $f(x)$ зростає; якщо $x\in[3;+\infty)$, $f'(x)<0$ і функція $f(x)$ спадає; точка $x_0=3$ – точка мінімуму. Звідси, зокрема, випливають нерівності:

$$f(1)<f(2)<f(3),\ f(3)>f(4)>f(5)>\ldots,$$

або

$$a_1<a_2<a_3,\ a_3>a_4>a_5>\ldots$$

Послідовність $\{a_n\}$ зростає до $n = 3$ і, починаючи з $n = 3$, спадає; a_3 – найбільший член цієї послідовності.

У прикладі 1 точка максимуму виявилася натуральною. Невелике ускладнення виникає, коли хоча б одна з точок екстремуму не є цілою.

Приклад 2. Нехай задано послідовність

$$a_n = 4n^3 - 27n^2 + 42n, \quad n \geq 1.$$

Їй відповідає функція

$$f(x) = 4x^3 - 27x^2 + 42x, \quad x \in [1; +\infty).$$

Знайдемо її критичні точки. Маємо:

$$f'(x) = 12x^2 - 54x + 42, \quad x \geq 1,$$

$$6(2x^2 - 9x + 7) = 0, \; x_1 = 1, \; x_2 = \frac{7}{2}$$

Дослідивши знак похідної, одержуємо, що функція f спадає, якщо $x \in \left[1; \frac{7}{2}\right)$, і зростає, якщо $x \in \left[\frac{7}{2}; +\infty\right)$. Звідси маємо:

$$f(1) > f(2) > f(3), \; f(4) < f(5) < f(6) < \ldots$$

Щоб порівняти значення $f(3)$ і $f(4)$, запишемо різницю

$$a_4 - a_3 = 4(4^3 - 3^3) - 27(4^2 - 3^2) + 42(4 - 3) = 1.$$

Отже, $a_4 > a_3$. Послідовність $\{a_n\}$ спадає при $n \leq 3$ і, починаючи з $n = 3$, зростає; a_3 – найменший член цієї послідовності.

Задача 1. Нехай n, m – натуральні числа, причому $n < m$. Яке з чисел більше: n^m чи m^n?

Розв'язання

Якщо $n = 1$, то $n^m = 1 < m^n = m$. Вважатимемо, що $n \geq 2$. Запишемо співвідношення

$$n^m \; ? \; m^n \qquad (5.1)$$

З'ясуємо, який зі знаків нерівності необхідно поставити замість знака питання, щоб співвідношення (5.1) було правильним. Прологарифмуємо (5.1) за натуральною основою. Одержуємо рівносильне співвідношення

$$m\ln n \,?\, n\ln m,$$

або

$$\frac{\ln n}{n} \,?\, \frac{\ln m}{m}. \qquad (5.2)$$

Дослідимо на монотонність послідовність

$$a_n = \frac{\ln n}{n},\ n \geq 2.$$

Запишемо відповідну функцію

$$f(x) = \frac{\ln x}{x},\ x \in [2; +\infty)$$

і знайдемо її критичні точки:

$$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2},$$

$$\frac{1-\ln x}{x^2} = 0,\ x = e.$$

Звідси легко дійти висновку, що функція $f(x)$ зростає, якщо $x \in [2; e]$, і спадає, якщо $x \in [e; +\infty)$. Оскільки $e < 3$, то

$$f(3) > f(4) > f(5) > \ldots,$$

або $a_n > a_m$, якщо $n \geq 3$, $m > n$. Отже, $\frac{\ln n}{n} > \frac{\ln m}{m}$ при $n \geq 3$. Звідси $n^m > m^n$.

Випадок $n = 2$ досліджуємо окремо. Маємо:

$$f(2) = \frac{\ln 2}{2} = \frac{\ln 4}{4} = f(4) > f(5) > f(6) > \ldots$$

Звідси $a_2 = a_4$, тобто $n^m = m^n$, коли $n = 2$ і $m = 4$; $a_2 > a_m$, тобто $n^m > m^n$, коли $n = 2$ і $m \geq 5$.

Залишився єдиний випадок: $n = 2$, $m = 3$. Очевидно, що $2^3 < 3^2$. Тому $n^m < m^n$, коли $n = 2$, $m = 3$.

Відповідь. $n^m < m^n$, якщо $n = 1$, а також, коли $n = 2$ і $m = 3$; $n^m = m^n$, якщо $n = 2$ і $m = 4$; $n^m > m^n$, якщо $n = 2$ і $m \geq 5$, а також, коли $n \geq 3$.

Завдання 1. Знайти найменший член послідовності

$$a_n = 4n^3 - 63n^2 + 60n,\ n \geq 1.$$

Завдання 2. Довести, що при $\alpha > 1$ послідовність $a_n = \left\{\sqrt[\alpha]{n^\alpha + 1}\right\}$, $n \geq 1$, спадає (тут $\{x\}$ – дробова частина числа x).

Вказівка. Доведіть, що $a_n = \sqrt[\alpha]{n^\alpha + 1} - n$.

Завдання 3. Нехай $f(x)$ – неспадна на $\mathbb{R}$ функція, а послідовність $\{x_n\}$ задовольняє рівність $x_n = f(x_{n-1})$, $n \geq 2$. Довести монотонність $\{x_n\}$.

Вказівка. Розгляньте два випадки: $x_1 > x_2$ і $x_1 < x_2$.

На закінчення звернімося до прикладу 4 § 3 р. II. При визначенні довжини кола неприродним виглядає розгляд тільки 2^n-кутників. Можна було розглядати правильні n-кутники, $n \geq 3$. Покажемо, зокрема, що послідовність $\{P_n'\}$ периметрів, вписаних у коло радіуса R правильних n-кутників, зростає. З малюнка 5 бачимо, що

$$P_n' = 2nR\sin\frac{\pi}{n}, \quad n \geq 3.$$

Зробимо заміну $\frac{\pi}{n} = x$, $0 < x \leq \frac{\pi}{3}$. Маємо:

$$P_n' = 2\pi R\frac{\sin x}{x}.$$

Розглянемо функцію $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $0 < x \leq \frac{\pi}{3}$. Дослідимо її:

$$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2}(x - \operatorname{tg} x) < 0,$$

оскільки $\operatorname{tg} x > x$, $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Отже, ця функція спадає.

Повернімося до послідовності $\{P_n'\}$. Нехай $n < m$. Тоді

$$x_1 = \frac{\pi}{n} > \frac{\pi}{m} = x_2,\ f(x_1) > f(x_2);$$

$$P_n' = 2\pi R f(x_1) < P_m' = 2\pi R f(x_2),$$

що й потрібно було довести.

Завдання 4. Довести, що послідовність $\{P_n'\}$ периметрів правильних n-кутників, описаних навколо кола, спадає.

§ 6. Побудова кривих, заданих параметрично

Ідея монотонності використовується не тільки для побудови графіка функції, але й для побудови кривої у випадку її параметричного задання. Параметричні рівняння кривої мають вигляд:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ t \in T. \qquad (6.1)$$

Тут $x(t)$, $y(t)$ – деякі функції, визначені на множині T. При цьому величини x і y є залежними змінними. Параметризація (6.1) задає криву

$$\Gamma = \{(x; y) \mid x = x(t), y = y(t), t \in T\}. \qquad (6.2)$$

Графік функції $y = f(x)$, $x \in A$, також можна розглядати як криву виду (6.2). Для цього потрібно лише ввести параметризацію

$$x = t,\ y = f(t),\ t \in A.$$

Приклад 1. Розглянемо криву, задану параметрично:

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ t \in \mathbf{R}. \qquad (6.3)$$

Тут a, b – додатні параметри. Вилучивши t з рівнянь (6.3), одержуємо рівняння еліпса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Координати кожної точки M еліпса можна подати у вигляді (6.3). Тому задана крива є еліпсом з напівосями a, b.

Завдання 1. Яка крива задається рівняннями

$$x = 2\sin^2\frac{t}{2},\ y = 2 + \sin t,\ t \in [0; 2\pi]?\ t \in [0; \pi]?$$

Завдання 2. Задати параметрично наступні криві:

а) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, де $a > 0$ (астроїда)

(*вказівка*: покладіть $x^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}\cos^2 t$, $y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}\sin^2 t$);

б) $x^3 + y^3 = 3xy$ (листок Декарта)



(*вказівка*: покладіть $y = tx$.

Рене Декарт (Картезій) (1596–1650) – видатний французький філософ, математик, фізик, фізіолог. Заклав основи аналітичної геометрії, розробив теорію алгебраїчних рівнянь).

Дослідження функцій $x(t)$, $y(t)$ на монотонність є центральним моментом побудови кривої (6.2). Проілюструємо це на кількох прикладах.

Приклад 2. Крива Г задана параметрично:

$$x = t - t^2,\ y = t + t^2,\ t \in \mathbb{R}. \qquad (6.4)$$

Вигляд функцій $x(t)$, $y(t)$ дає змогу виявити симетрію кривої. Розглянемо їх значення в точці $(-t)$:

$$x(-t) = -t - t^2 = -y(t),\ y(-t) = -t + t^2 = -x(t).$$

Таким чином, кривій Г разом із точкою $M(x(t_0); y(t_0))$ належить точка $M'(-y(t_0); -x(t_0))$. Точка M' є образом точки M при симетрії відносно прямої $y = -x$ (перевірте це!). Отже, частина кривої Г при $t \geq 0$ симетрична частині кривої при $t \leq 0$ відносно цієї прямої. Тому спочатку для побудови обмежимося проміжком $t \geq 0$. На цьому проміжку $y(t)$ зростає, а $x(t)$ зростає при $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ і спадає при $t \geq \frac{1}{2}$.

Значення координат, коли $t = 0$, $t = \frac{1}{2}$ вносимо в таблицю 1. Також у таблицю 1 вносимо координати точки перетину з віссю ординат ($t = 1$) і граничні значення координат, якщо $t \to +\infty$.

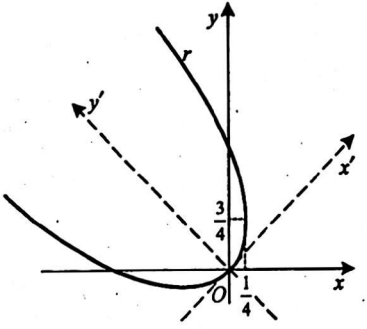
Таблиця 1

t	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
x	0	$\frac{1}{4}$	0	$-\infty$
y	0	$\frac{3}{4}$	2	$+\infty$

При $0 \le t \le \frac{1}{2}$ обидві функції зростають. На цьому проміжку t однозначно визначається через x: $t = t(x)$, $0 \le x \le \frac{1}{4}$. Тоді y однозначно визначається через x при $0 \le t \le \frac{1}{2}$. Функція $y = y(x)$, $0 \le x \le \frac{1}{4}$, зростає, оскільки при зростанні t зростає x і зростає також y. Дуга кривої Г при $0 \le t \le \frac{1}{2}$ є графіком цієї функції.

При $\frac{1}{2} \le t < \infty$ $x(t)$ спадає, а $y(t)$ зростає. Цьому проміжку відповідає спадна функція $y = y(x)$, $x \le \frac{1}{4}$. За допомогою таблиці 1 і наведених міркувань будуємо частину кривої при $t \ge 0$ і відображаємо її симетрично відносно прямої $y = -x$. Детальніше дослідження показує, що функція $y = y(x)$ при $0 \le t \le \frac{1}{2}$ опукла, а при $t \ge \frac{1}{2}$ угнута.

Крива Г нагадує параболу (мал. 9). Покажемо, що це справді парабола.



Мал. 9

Спрямуємо осі нових декартових координат так, як показано на малюнку 9. Введемо вектори

$$\vec{e}_1 = \left(\cos\frac{\pi}{4}; \sin\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \vec{e}_2 = \left(\cos\frac{3\pi}{4}; \sin\frac{3\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

і довільний вектор $\bar{r}=(x;\ y)$, Точка $A\ (x;\ y)$ матиме такі координати в системі $x'Oy'$:

$$x'=\bar{r}\cdot\bar{e}_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y),\ y'=\bar{r}\cdot\bar{e}_2=\frac{\sqrt{2}}{2}(y-x).$$

Вилучивши параметр t з формули (6.4), одержимо

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\frac{y-x}{2},$$

або

$$y'=\frac{\sqrt{2}}{2}(x')^2.$$

Це рівняння параболи в координатах x', y'. Пряма Oy' – це вісь параболи.

Приклад 3. Криву задано параметрично:

$$x=t+\sin t,\ y=1+\cos t,\ t\in\mathbf{R}.$$

Визначимо спочатку, чи має крива певну симетрію. Отримуємо

$$x(-t)=-x(t),\ y(-t)=y(t).$$

Міркуючи аналогічно до попереднього прикладу, доходимо висновку, що крива симетрична відносно осі ординат. Тому будемо її досліджувати лише для $t\geq 0$. Використовуючи періодичність тригонометричних функцій, отримуємо

$$x(t+2\pi)=x(t)+2\pi,\ y(t+2\pi)=y(t).$$

Тому достатньо побудувати графік функції, якщо $t\in[-\pi;\pi]$, а потім побудовану криву подовжити вліво і вправо з періодом 2π. Отже, обмежимося проміжком $I=[0;\pi]$. Згідно із задачею 3 §4 р. III $x\ (t)$ зростає на I. Функція $\cos t$ спадає на I, тому $y\ (t)$ також спадає на I. Тому дана крива, коли $t\in I$ є графіком спадної функції $y=y_1(x)$, де $y_1(x)=y(g(x))$, а $g(x)$ – розв'язок відносно t рівняння $t+\sin t=x$. Складемо таблицю значень і побудуємо частину кривої, якщо $t\in I$ (табл. 2).

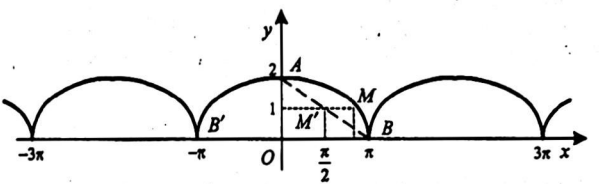
Нехай стовпцям таблиці відповідають точки A, M, B у площині xOy. Точка M лежить вище від хорди AB, оскільки, якщо $y=1$, має-

мо $x=\frac{\pi}{2}+1>\frac{\pi}{2}=x'$, де x' – абсциса точки M' перетину хорди AB і прямої $y=1$. Більш точне дослідження показує, що функція $y=y(x)$, $x\in[0;\pi]$, угнута, і вся дуга AB кривої лежить вище від хорди AB (мал. 10).

Таблиця 2

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π
x	0	$\frac{\pi}{2}+1$	π
y	2	1	0

Далі відображаємо цю дугу симетрично відносно осі Oy і переносимо побудовану дугу $B'B$ вліво і вправо з періодом 2π.



Мал. 10

Побудована крива називається *циклоїдою*. Цікаво, що цю криву можна одержати кінематичним способом. Нехай колесо радіуса $r=1$ котиться уздовж осі Ox. Тоді точка його обода описує циклоїду (доведіть!).

Завдання 3. Довести, що дуга AB побудованої в прикладі 3 циклоїди лежить вище від хорди AB.

Завдання 4. Побудувати криві із завдання 2.

Завдання 5. Побудувати криві, задані рівняннями:

а) $x=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$, $y=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$, $t\in\mathbf{R}$ (гіпербола);

б) $x=\cos 3t$, $y=\sin t$, $t\in\mathbf{R}$.

РОЗДІЛ V. СТРУКТУРА МОНОТОННИХ ФУНКЦІЙ

§ 1. Існування границі

Означення 1. *Функція f називається обмеженою на множині A, якщо знайдеться таке число $C > 0$, що для всіх $x \in A$*

$$|f(x)| \le C. \qquad (1.1)$$

Якщо множина A збігається з областю визначення функції f, то така функція називається обмеженою.

Зокрема, функція $\arcsin x$ обмежена, оскільки

$$|\arcsin x| \le \frac{\pi}{2},\ x \in [-1; 1],$$

а функція $\operatorname{tg} x$ не обмежена, оскільки при значеннях $x < \frac{\pi}{2}$, що наближаються до $\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg} x$ набуває як завгодно великих значень. На множині $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4}\right]$ ця функція обмежена внаслідок нерівності

$$|\operatorname{tg} x| \le \sqrt{3},\ x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4}\right].$$

Завдання 1. Функції f і g обмежені і мають спільну область визначення. Чи обмежені функції $f+g$, fg, $(|f|+0{,}5)^{\frac{1}{f}}$?

Завдання 2. Нехай p, q – многочлени. У яких випадках функція $\frac{p}{q}$ обмежена?

Завдання 3. Якщо функція монотонна на відрізку $[a; b]$, то вона обмежена. Довести.

Означення 1 аналогічне до означення обмеженої послідовності (див. завдання 1 § 4 р. II). Слід очікувати, що властивості монотонних обмежених функцій аналогічні до властивостей таких самих послідовностей. Справді, має місце наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай функція f задана на проміжку $[a; b)$, де b – скінченне або нескінченне число. Якщо функція f монотонна й обмежена, то існує границя*

$$\lim_{x\to b} f(x). \qquad (1.2)$$

Доведення

Не обмежуючи загальності, вважатимемо, що f не спадає. Розглянемо лише випадок $b \in \mathbf{R}$ (випадок $b = +\infty$ розберіть самостійно). Введемо послідовність $\{x_n\}$ точок проміжку $[a; b)$, що збігається до b:

$$x_n = b - \frac{b-a}{n},\ n \geq 1.$$

Ця послідовність зростає, тому послідовність значень

$$y_n = f(x_n),\ n \geq 1,$$

не спадає. Крім того, внаслідок обмеженості f знайдеться таке число $C > 0$, що $|y_n| \leq C$, $n \geq 1$. Тоді $\{y_n\}$ обмежена (див. завдання 1 § 4 р. II). За теоремою Вейєрштрасса $\{y_n\}$ збігається до деякого числа L.

Доведемо, що функція f збігається до L, якщо $x \to b$. Нехай $\varepsilon > 0$ задано. За означенням границі послідовності існує такий номер N, що при $n \geq N$ виконується нерівність $|y_n - L| < \varepsilon$. Покладемо

$$\delta = b - x_N.$$

Нехай $x \in [a; b)$, $|x - b| < \delta$. Тоді $x_N < x$, причому зі збіжності $\{x_n\}$ до b випливає існування такого номера $M > N$, що $x < x_M$. Внаслідок неспадання f маємо

$$y_N = f(x_N) \leq f(x) \leq f(x_M) = y_M.$$

Обидва члени y_N і y_M потрапляють в інтервал $(L - \varepsilon; L + \varepsilon)$. Тому значення $f(x)$ також потрапляє в цей інтервал. За даним ε ми побудували шукане δ, тому за означенням границі функції в точці границя (1.2) існує і дорівнює L. ∎

Розглянемо кілька застосувань.

Задача 1. Функція f, задана на проміжку $[0;+\infty)$, зростає і задовольняє нерівність

$$f(x+1)\le f(x)+\frac{1}{x^2+1},\ x\ge 0 \qquad (1.3)$$

Довести існування границі

$$\lim_{x\to+\infty} f(x). \qquad (1.4)$$

Розв'язання

Доведемо обмеженість функції f. Для числа $x\ge 0$ маємо

$$f(0)\le f(x)\le f([x]+1),$$

де $[x]$ – ціла частина числа x. Тому залишається обмежити значення f у натуральних точках.

Нехай $n\in\mathbb{N}$. Послідовно застосовуючи (1.3), коли $x=n, n-1,\ldots, 1, 0$, маємо:

$$f(n+1)\le f(n)+\frac{1}{n^2+1}\le f(n-1)+\frac{1}{(n-1)^2+1}+\frac{1}{n^2+1}\le\ldots\le$$
$$\le f(0)+\frac{1}{0^2+1}+\frac{1}{1^2+1}+\ldots+\frac{1}{n^2+1}.$$

Оцінимо при $n\ge 2$ суму

$$1+\frac{1}{1^2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\ldots+\frac{1}{n^2+1}\le 2+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\le$$

$$\le 2+\frac{1}{2\cdot 1}+\frac{1}{3\cdot 2}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n-1)}=$$

$$=2+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=3-\frac{1}{n}<3.$$

Отже, при довільному $x\ge 0$

$$f(0)\le f(x)\le f(0)+3,$$

звідки

$$|f(x)|\le C=|f(0)|+3.$$

Обмеженість f встановлено.

Доцільно перевірити, що функція, про яку йдеться в цій задачі, існує. Справді, функція $f(x)=\operatorname{arctg} x$, $x\ge 0$, зростає. Крім того, за теоремою Лагранжа, при $x\ge 0$ маємо

$$\operatorname{arctg}(x+1)-\operatorname{arctg} x=f'(\theta)(x+1-x)=\frac{1}{\theta^2+1},$$

де $\theta\in(x;x+1)$. Тому

$$\frac{1}{\theta^2+1}\le\frac{1}{x^2+1} \text{ і } f(x+1)-f(x)\le\frac{1}{x^2+1}.$$

Таким чином, функція $\operatorname{arctg} x$, $x\ge 0$, задовольняє нерівність (1.3).

Отже, функція f монотонна й обмежена. З теореми 1 випливає існування границі (1.4).

Теорему 1 можна застосовувати для обчислення границь.

Приклад 1. Нехай $p>0$, $a>1$. Доведемо існування й обчислимо границю

$$\lim_{x\to+\infty} x^p a^{-x}. \qquad (1.5)$$

Розглянемо функцію $f(x)=x^p a^{-x}$, $x>0$, і знайдемо її критичні точки x_0. Маємо

$$f'(x)=x^{p-1}a^{-x}(p-x\ln a)=0,\ x_0=\frac{p}{\ln a}>0.$$

Функція f зростає, якщо $x\in(0;x_0]$, і спадає, якщо $x\in[x_0;+\infty)$. Отже, при $x\ge x_0$ виконується нерівність

$$0<f(x)\le f(x_0).$$

Тепер існування границі (1.5) випливає з теореми 1, застосованої до функції f і проміжку $[x_0;+\infty)$. Позначимо цю границю через L. Тоді для двох послідовностей значень функції матимемо

$$\lim_{n\to+\infty} f(n)=\lim_{n\to+\infty} f(2n)=L.$$

Зауважимо, що

$$f(2n)=2^p n^p a^{-2n}=2^p a^{-n} f(n)\to 2^p\cdot 0\cdot L=0,\ n\to+\infty.$$

Тут ми скористалися важливою границею

$$\lim_{n\to+\infty} a^{-n} = 0,\ a>1, \qquad (1.6)$$

а також теоремою про границю добутку двох послідовностей. Отже, $L=0$.

Завдання 4. Сформулювати і довести аналог теореми 1 для лівого кінця інтервалу монотонності.

Вказівка. Розгляньте функцію $g(x)=f(a+b-x)$.

Завдання 5. Довести співвідношення (1.6) тим само методом, що й у прикладі 1.

Завдання 6. Нехай $\varepsilon>0$. За допомогою теореми 1 довести існування і знайти границю

$$\lim_{x\to 0}\left(x^{\varepsilon}\cdot\ln x\right).$$

§ 2. Стрибки монотонної функції

У теоремі 1 § 1, власне кажучи, стверджується існування лівосторонньої границі функції f у точці b. Дамо означення лівосторонньої границі.

Означення 1. *Лівим напівоколом дійсного числа x_0 будемо називати інтервал $(x_0-\delta;\ x_0)$, а правим напівоколом цього числа – інтервал $(x_0;\ x_0+\delta)$, де $\delta>0$.*

Означення 2. *Нехай $x_0\in\mathbb{R}$ і задано функцію f, причому деякий проміжок $(a;\ x_0)$ належить $D(f)$. Число p є лівосторонньою границею функції f у точці x_0, якщо для кожного $\varepsilon>0$ знайдеться такий лівий напівокіл $(x_0-\delta;\ x_0)$, що для всіх $x\in(x_0-\delta;\ x_0)$ виконується нерівність $|f(x)-p|<\varepsilon$.*

Поняття правосторонньої границі цілком аналогічне.

Означення 3. *Нехай $x_0\in\mathbb{R}$ і задано функцію f, причому деякий проміжок $(x_0;\ b)$ належить $D(f)$. Число p є правосторонньою границею функції f у точці x_0, якщо для кожного $\varepsilon>0$ знайдеться такий правий напівокіл $(x_0;\ x_0+\delta)$, що для всіх $x\in(x_0-\delta;\ x_0)$ виконується нерівність $|f(x)-p|<\varepsilon$.*

Далі лівосторонню границю позначатимемо через $f(x_0-0)$ або писатимемо $f(x)\to p$, $x\to x_0-0$. Відповідно правосторонню границю будемо позначати через $f(x_0+0)$ або записувати $f(x)\to p$, $x\to x_0+0$. Коли $x_0=0$, будемо записувати коротше: $f(+0)$ чи $f(-0)$, або $f(x)\to p$, $x\to+0$ чи $x\to-0$.

Нехай, наприклад, $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x^2-3x+2}$, $x_0=1$. Маємо

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-2}, & x>1;\\ \dfrac{1}{2-x}, & x<1.\end{cases}$$

Лівостороння границя в точці $x_0=1$ знаходиться так:

$$f(1-0)=\lim_{x\to1}\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2-1}=1.$$

Аналогічно

$$f(1+0)=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-2}=\frac{1}{1-2}=-1.$$

Завдання 1. Нехай функція f визначена в деякому околі $(x_0-\delta;x_0+\delta)$ точки x_0. Функція f неперервна в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли в цій точці існують обидві односторонні границі, причому $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$. Довести.

***Теорема* 1.** *Нехай монотонна функція f задана на інтервалі $(a;b)$, де a, b – скінченні або нескінченні числа. Тоді в кожній точці $x_0\in(a;b)$ існують односторонні границі $f(x_0-0)$ і $f(x_0+0)$.*

Доведення

Будемо вважати, що функція f не спадає. Тоді при $a<c\le x<x_0<b$ має місце нерівність $f(c)\le f(x)\le f(x_0)$. Тобто f обмежена і монотонна на проміжку $[c;x_0)$. Отже, за теоремою 1 § 1

існує границя $f(x_0-0)$. Аналогічно доводиться існування границі $f(x_0+0)$. ∎

Завдання 2. Чи існують в умовах теореми 1 скінченні границі функції f на кінцях інтервалу $(a;b)$?

Завдання 3. Нехай монотонна функція f задана на відрізку $[a;b]$. Тоді існують границі функції f, коли $x\to a$ і коли $x\to b$. Довести.

Умова неперервності функції в точці в термінах односторонніх границь сформульована у завданні 1. Виявляється, для монотонної функції цю умову можна дещо послабити.

Теорема 2. *Нехай монотонна функція f визначена в деякому околі $(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$ точки x_0. Функція f неперервна в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли*

$$f(x_0-0)=f(x_0+0). \qquad (2.1)$$

Доведення

Границі існують згідно з теоремою 1. З урахуванням завдання 1, для доведення теореми 2 достатньо з рівності (2.1) і монотонності f вивести рівність значення $f(x_0)$ цим границям.

Будемо вважати, що функція f не спадає. Нехай δ – число з умови теореми. Тоді, якщо $x\in(x_0-\delta;\ x_0)$, маємо: $f(x)\le f(x_0)$. З означення односторонніх границь неважко дійти висновку, що

$$f(x_0-0)\le f(x_0). \qquad (2.2)$$

Розглядаючи правий напівокіл, аналогічно маємо:

$$f(x_0+0)\ge f(x_0). \qquad (2.3)$$

Зі співвідношень (2.1)–(2.3) одержуємо рівність

$$f(x_0-0)=f(x_0)=f(x_0+0). \text{ ∎}$$

Теореми 1 і 2 показують, що монотонна функція f має розрив у точці x_0 тоді і тільки тоді, коли $f(x_0-0)\ne f(x_0+0)$. При цьому величина

$$f(x_0+0)-f(x_0-0) \qquad (2.4)$$

називається *стрибком функції* f у точці x_0.

Зауваження. Нехай функція f визначена на відрізку $[a; b]$ і монотонна. Вона має розрив у точці a тоді і тільки тоді, коли $f(a+0)\neq f(a)$. При цьому різниця $f(a+0)-f(a)$ називається стрибком функції f у точці a. Аналогічно означається стрибок у точці b. Далі позначатимемо $f(a-0)=f(a)$, $f(b+0)=f(b)$, щоб в усіх випадках стрибок у точці x_0 виражався різницею (2.4).

Розглянемо, наприклад, функцію

$$g(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

У будь-якому правому напівоколі нуля $(0; \delta)$ значення цієї функції дорівнює 1, тому правостороння границя в нулі $g(+0)=1$. У довільному лівому напівоколі нуля $(-\delta; 0)$ значення цієї функції дорівнює (-1), тому лівостороння границя в нулі $g(-0)=-1$. Стрибок функції g в нулі дорівнює $g(+0)-g(-0)=1-(-1)=2$.

Для функції $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x^2-3x+2}$, розглянутої після означення 3, стрибок у точці 1 дорівнює $f(1+0)-f(1-0)=-1-1=-2$.

Неважко вказати монотонну функцію з довільною скінченною кількістю точок розриву. Побудуємо монотонну на відрізку функцію з нескінченною кількістю таких точок.

Приклад 1. Покладемо

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\left[\dfrac{1}{x}\right], & 0<x\leq 1,\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0.\end{cases}$$

Тоді f незростаюча на $[0; 1]$ і неперервна скрізь, окрім точок виду $x_k = \frac{1}{k+1}$, $k \geq 1$. Стрибок функції f у точці x_k дорівнює $\operatorname{arctg} k - \operatorname{arctg}(k+1)$.

Завдання 4. Довести твердження прикладу 1 і побудувати графік функції f. Чи можна занумерувати точки розриву функції f у порядку їхнього зростання?

Завдання 5. Чи існує монотонна на відрізку функція з такими точками розриву, що їх не можна занумерувати ані в порядку зростання, ані в порядку спадання?



Виникає запитання: скільки точок розриву може мати монотонна функція? Хоча їх може бути і нескінченна кількість, теореми 1 і 2 дозволяють сподіватися, що точок неперервності в певному сенсі більше. Перш ніж перейти до точних означень, зробимо невеликий екскурс у захоплюючий розділ математики – теорію множин. Творцем цієї теорії є видатний німецький математик Георг Кантор (1845–1918). Створена ним теорія множин є основою сучасної математики й істотно вплинула на її розвиток. Рекомендуємо читачеві справжній математичний детектив – книжку М.Я.Віленкіна «Рассказы о множествах» (М., 1969), де докладно висвітлені питання, викладені нижче.

Нескінченна множина A називається зліченною, якщо її елементи можна занумерувати. Іншими словами, множина A зліченна, якщо між нею і множиною натуральних чисел можна встановити взаємно однозначну відповідність. Зокрема, множини $\mathbb{N}$ і $\mathbb{Z}$ зліченні. Менш очевидно, що *множина* $\mathbb{Q}$ також *зліченна*. Можна довести, що *множина чисел довільного відрізка* $[a; b]$, *і тим більше множина* $\mathbb{R}$, *не є зліченними.*

Зліченна множина має таку важливу властивість: *будь-яка її підмножина або скінченна, або зліченна.*

Введення поняття зліченної множини дає можливість порівнювати деякі нескінченні множини щодо запасу елементів у них. Так,

дійсних чисел істотно більше, ніж раціональних, а раціональних у певному сенсі стільки, скільки і цілих чисел.

***Теорема* 3.** *Множина точок розриву монотонної на інтервалі* $(a; b)$ *функції* f *скінченна або зліченна.*

Доведення

Нехай f – неспадна функція. Розглянемо довільну точку розриву $x_0 \in (a; b)$. За теоремою 2 і внаслідок неспадання f справедлива нерівність

$$f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0).$$

На інтервалі $(f(x_0 - 0); f(x_0 + 0))$ виберемо довільну точку $r(x_0) \in \mathbb{Q}$. Така точка існує, оскільки в кожному інтервалі знайдеться хоча б одна раціональна точка.

Нехай D є множиною точок розриву функції f на інтервалі $(a; b)$. Кожному елементу з D ми поставили у відповідність деяке раціональне число. Перевіримо, що ця відповідність взаємно однозначна.

Нехай $x_1 < x_2$ – дві точки з D. Тоді

$$f(x_1 - 0) < r(x_1) < f(x_1 + 0) \le f(x_2 - 0) < r(x_2),$$

звідки $r(x_1) \neq r(x_2)$. Отже, функція r взаємно однозначно відображає D на деяку множину $\mathbb{Q}_D \subset \mathbb{Q}$. Множина $\mathbb{Q}$ зліченна, тому $\mathbb{Q}_D$ скінченна або зліченна. У першому випадку D також скінченна. У другому випадку елементи $\mathbb{Q}_D$ можна занумерувати: $q_1, q_2, q_3, ..., q_n, ...$

Переходячи до прообразів при відображенні r, одержуємо нумерацію елементів множини D:

$$d_1 = r^{-1}(q_1),\ d_2 = r^{-1}(q_2),\ d_3 = r^{-1}(q_3),\ ...,\ d_n = r^{-1}(q_n),\ ...$$

***Наслідок* 1.** *У кожному інтервалі* $(\alpha; \beta)$ *області визначення монотонної функції* f *існує хоча б одна II точка неперервності.*

(Це твердження випливає з теореми 3 і незліченності множини точок інтервалу $(\alpha; \beta)$.)

Завдання 6. Чи справедливе твердження теореми 3 для монотонної на відрізку функції?

Завдання 7. У яких точках функція Діріхле

$$d(x)=\begin{cases}1, & x\in \mathbf{Q},\\ 0, & x\in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q},\end{cases}$$

має розрив? Довести, що d не монотонна на жодному інтервалі дійсної прямої: а) безпосередньо; б) за допомогою теореми 3.

§ 3. Монотонна функція, розривна в раціональних точках

Отже, монотонна функція має скінченну або зліченну кількість точок розриву. Зокрема, на кожному інтервалі своєї області визначення вона неперервна хоча б в одній точці. Але приклад 1 § 2 показує, що монотонна на відрізку функція може мати нескінченну кількість точок розриву. Виявляється, існує монотонна функція, що має ще більш «патологічні» властивості: на кожному інтервалі області визначення вона має точку розриву. Для побудови цієї функції знадобляться деякі відомості про числові ряди. Докладний виклад цих питань див. у книжці А.Я.Дороговцева «Ряды», виданої в серії «Бібліотечка фізико-математичної школи» (К.,1978).

Нехай $\{a_n\}$ – довільна послідовність дійсних чисел. Вираз

$$a_1+a_2+\ldots+a_k+\ldots \qquad (3.1)$$

називається рядом і позначається так: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$. При кожному k число a_k називається k-м членом ряду, сума $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ називається n-ю частинною сумою, а послідовність $\{S_n\}$ називається послідовністю частинних сум. Якщо існує

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S,$$

то ряд (3.1) *називається збіжним і його сума дорівнює числу S. У цьому випадку пишуть*

$$a_1+a_2+\ldots+a_k+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}a_k=S$$

і кажуть, що ряд (3.1) *збігається до суми S.*

Найпростішим прикладом збіжного ряду є геометричний ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1},$$

де $a \in \mathbf{R}$, $|q|<1$. Його сума дорівнює $\frac{a}{1-q}$.

Нехай I – деяка нескінченна підмножина множини натуральних чисел. Тоді I зліченна (див. § 2). Занумеруємо числа з I у порядку зростання: $i_1 < i_2 < \ldots < i_k < \ldots$

Нехай задано деякий збіжний ряд із додатних чисел $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Утворимо новий ряд

$$a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_k} + \ldots \qquad (3.2)$$

Він збігається, і його суму позначатимемо так:

$$\sum_{k \in I} a_k. \qquad (3.3)$$

Якщо множина I скінченна, то під сумою (3.3) будемо розуміти відповідну скінченну суму (якщо $I = \varnothing$, то вважається, що вираз (3.3) дорівнює нулю).

Нехай $I_1 \subset I_2 \subset \mathbf{N}$; $a_k > 0$, $k \geq 1$. Тоді має місце рівність

$$\sum_{k \in I_2} a_k = \sum_{k \in I_1} a_k + \sum_{k \in I_2 \setminus I_1} a_k.$$

Перейдемо до побудови нашої функції. Відомо, що множина раціональних чисел проміжку $[0,1)$ зліченна; нехай числа цієї множини занумеровані у вигляді послідовності $\{r_n,\ n \geq 1\}$. Покладемо

$$f(x) = \sum_{k \in \{n:\, r_n < x\}} \frac{1}{2^k},\ x \in [0;1].$$

Зокрема,

$$f(0) = \sum_{k \in \varnothing} \frac{1}{2^k} = 0,\ f(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1.$$

Тут ми використали формулу суми геометричного ряду.

Позначимо $I(x)=\{n: r_n < x\}$. Дослідження властивостей функції f розіб'ємо на кілька лем.

***Лема* 1.** *Функція f зростає.*

Доведення

Нехай $0 \le x < y \le 1$. Тоді $I(x) \subset I(y)$; $I(x) \ne I(y)$, оскільки в проміжку $[x; y)$ є хоча б одне раціональне число. Звідси

$$f(y)=\sum_{k\in I(y)}\frac{1}{2^k}=\sum_{k\in I(x)}\frac{1}{2^k}+\sum_{k\in I(y)\setminus I(x)}\frac{1}{2^k}>\sum_{k\in I(x)}\frac{1}{2^k}=f(x).$$

***Лема* 2.** *Функція f розривна в раціональних точках проміжку* $[0; 1)$, *причому її стрибок у точці r_n дорівнює* $\frac{1}{2^n}$.

Доведення

Проведемо доведення лише для точки 0; інші випадки розгляньте самостійно. Нехай n_0 – номер, що одержала точка 0 у послідовності $\{r_n\}$. Тоді при $x > 0$

$$f(x)>\frac{1}{2^{n_0}};\ f(+0)\ge\frac{1}{2^{n_0}}>f(0)=0. \qquad (3.4)$$

Із зауваження 1 § 2 випливає, що 0 – точка розриву. Знайдемо величину стрибка $f(+0)-f(0)=f(+0)$.

Зафіксуємо довільний номер $N > n_0$. Оскільки числа $\{r_n : 1 \le n < N, n \ne n_0\}$ утворюють скінченну множину і всі вони відмінні від нуля, то при деякому $\delta > 0$ ці числа не потрапляють у проміжок $[0; \delta)$. Можна, наприклад, покласти $\delta=\min\limits_{1\le n<N,\,k\ne n_0} r_k$.

Тоді $I(\delta) \subset \{n: n = n_0$ або $n \ge N\}$, і при $0 < x < \delta$ маємо:

$$f(x)<f(\delta)=\sum_{k\in I(\delta)}\frac{1}{2^k}\le\frac{1}{2^{n_0}}+\sum_{k=N}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^{n_0}}+\frac{1}{2^{N-1}}.$$

Звідси

$$f(+0)<\frac{1}{2^{N-1}}+\frac{1}{2^{n_0}}.$$

Спрямовуючи N до нескінченності, одержуємо $f(+0) \le \frac{1}{2^{n_0}}$, що спільно з умовами (3.4) доводить лему для точки $r_{n_0} = 0$. ∎

Лема 3. *Функція f неперервна в усіх ірраціональних точках і в точці* 1.

Доведення

Проведемо доведення тільки для ірраціональних точок. Нехай $x_0 \in [0;1]$, $x_0 \notin \mathbb{Q}$. Тоді $x_0 \in \{r_n, n \ge 1\}$. Обчислимо односторонні границі в цій точці. При цьому міркування аналогічні до наведених у доведенні леми 2.

Зафіксуємо довільне натуральне число N. Оскільки числа $\{r_n : 1 \le n < N\}$ утворюють скінченну множину і всі вони відмінні від x_0, то при деякому $\delta > 0$ ці числа не потрапляють у відрізок $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$. Тоді

$$I(x_0 + \delta) \setminus I(x_0) \subset \{n : n \ge N\}; \quad I(x_0) \setminus I(x_0 - \delta) \subset \{n : n \ge N\}. \qquad (3.5)$$

Звідси при $x_0 < x < x_0 + \delta$ маємо:

$$0 < f(x) - f(x_0) < f(x_0 + \delta) - f(x_0) \le \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{N-1}};$$

$$0 \le f(x_0 + 0) - f(x_0) \le \frac{1}{2^{N-1}}.$$

Спрямовуючи N до нескінченності, одержуємо $f(x_0 + 0) = f(x_0)$. Рівність $f(x_0 - 0) = f(x_0)$ виводиться аналогічно із вкладення (3.5). Неперервність функції f у точці x_0 доведено (див. завдання 1 § 2). ∎

Сформулюємо ще одну цікаву властивість функції f. Для цього нам знадобиться поняття односторонньої неперервності функції.

Означення 1. *Нехай функція g задана на відрізку $[a; b]$. Якщо в кожній точці $x_0 \in (a; b]$ існує лівостороння границя, причому*

$$g(x_0 - 0) = g(x_0),$$

то функція називається неперервною зліва.

Аналогічно означається функція, неперервна справа.

Лема 4. *Функція f неперервна зліва.*

Доведення

Згідно з лемою 3 достатньо встановити рівність $f(x_0-0)=f(x_0)$ для раціональних точок інтервалу (0; 1). Наші міркування будуть аналогічні до доведення леми 2. Нехай $x_0=r_{n_0}$, N – фіксоване натуральне число, $N>n_0$. Чисел $\{r_n: 1\le n<N,\ n\ne n_0\}$ є скінченна кількість, всі вони відмінні від x_0, тому при деякому $\delta>0$ ці числа не потрапляють у проміжок $[x_0-\delta; x_0)$. Тоді, якщо $x\in(x_0-\delta; x_0)$, маємо:

$$0<f(x_0)-f(x)<f(x_0)-f(x_0-\delta)=\sum_{k\in\{n: r_n\in[x_0-\delta; x_0)\}}\frac{1}{2^k}\le\sum_{k=N}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^{N-1}}.$$

Спрямовуючи x до x_0-0, одержуємо:

$$0\le f(x_0)-f(x_0-0)\le\frac{1}{2^{N-1}}.$$

Оскільки $\frac{1}{2^{N-1}}\to 0$, $N\to\infty$, то

$$0\le f(x_0)-f(x_0-0)\le 0,\ f(x_0-0)=f(x_0).\blacksquare$$

§ 4. Теорема про розклад

Функція f з § 3, як видно з леми 2, має наступну цікаву властивість:

$$f(1)-f(0)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\sum_{k=1}^{\infty}\big(f(r_k+0)-f(r_k-0)\big). \tag{4.1}$$

Такі функції називаються *функціями стрибків.*

Означення 1. *Нехай f – монотонна функція на $[a; b]$; $\{x_n, n\ge 1\}$ – множина усіх її точок розриву. Якщо*

$$\sum_{k\ge 1}\big(f(x_k+0)-f(x_k-0)\big)=f(b)-f(a), \tag{4.2}$$

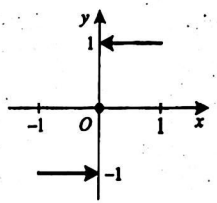
то функція f називається функцією стрибків.

Зауваження. Якщо f неперервна, тобто стрибки відсутні, то вважається, що ліва частина рівності (4.2) дорівнює 0; при цьому f, що задовольняє (4.2), є деякою сталою. Якщо кількість стрибків скінченна, то в (4.2) сума також скінченна; при нескінченній кількості стрибків ця сума перетворюється в суму ряду.

Приклад 1. Розглянемо функцію

$$f(x)=\begin{cases}1, x\in(0;1],\\ 0, x=0,\\ -1, x\in[-1;0).\end{cases}$$

Графік цієї функції наведено на малюнку 11. Ця функція не спадає і має єдиний розрив у точці 0.



Мал. 11

Функція f є функцією стрибків, оскільки

$$f(1)-f(-1)=2=f(+0)-f(-0).$$

На кожному з проміжків $[-1;0)$ і $(0;1]$, які не містять точок розриву, ця функція набуває сталих значень. Збільшує свої значення ця функція лише в околі точки розриву.

Функція з § 3 має, без сумніву, складнішу структуру. Так, вона має точки розриву на кожному інтервалі. Однак і про цю функцію можна сказати, що вона росте тільки за рахунок своїх стрибків. Точний зміст цього твердження полягає в рівності (4.1).

Функції стрибків допускають цікаве фізичне тлумачення.

Будемо говорити, що на проміжку $[a;b)$ є дискретна система мас, якщо виділено скінченну або зліченну множину точок

$\{x_k, k \ge 1\} \subset [a; b)$ і в кожну точку x_k вміщено деяку масу m_k, причому загальна маса

$$\sum_k m_k < \infty .$$

Дискретну систему мас можна уявляти собі як набір гирьок з масами m_1, m_2, ... , вміщених у відповідні точки відрізка. Функцією розподілу дискретної маси назвемо функцію f, що дорівнює масі проміжку $[0; x)$, точніше,

$$f(x) = \sum_{k \in \{n: x_n < x\}} m_k , \quad x \in [a; b]. \qquad (4.3)$$

Тоді f має в точках x_k стрибки, що дорівнюють m_k (доведення аналогічне до доведення леми 2 § 3), і є функцією стрибків. Зокрема, функція f з § 3 є функцією розподілу системи мас, зосереджених у раціональних точках $\{r_k, k \ge 1\}$ проміжку $[0, 1)$; при цьому в точці r_k міститься маса $\frac{1}{2^k}$.

Так само, як і в лемі 4 § 3, можна показати, що функція розподілу дискретної маси є неспадною і неперервною зліва. Виявляється, справедливе й обернене твердження: неспадна і неперервна зліва функція стрибків може бути зведена до функції розподілу деякої дискретної маси.

Теорема 1. *Нехай f — неперервна зліва, неспадна функція стрибків, визначена на $[a; b]$. Тоді функцію $f(x)$ можна подати у вигляді*

$$f(x) = f(a) + g(x), \quad x \in [a; b], \qquad (4.4)$$

де g — функція розподілу деякої дискретної маси.

Доведення

Нехай $\{x_n, n \ge 1\}$ — множина всіх точок розриву функції f. Покладемо

$$m_k = f(x_k + 0) - f(x_k), \; k \ge 1;$$
$$g(x) = \sum_{k \in \{n: x_n < x\}} m_k , \quad x \in [a; b].$$

Система мас $\{m_k\}$ має скінченну загальну масу, що випливає з рівності (4.2) і неперервності f зліва. Залишилося довести, що функція g задовольняє співвідношення (4.4).

Якщо $x = a$, маємо $g(a) = 0$, і (4.4) виконано; якщо $x = b$, рівність (4.4) випливає з (4.2). Нехай $x \in (a; b)$. Тоді приріст монотонної функції f на $[a; x_0]$ не менший від суми стрибків на проміжку $[a; x_0)$, звідки

$$f(x) - f(a) \geq \sum_{k \in \{n: x_n < x\}} m_k = g(x). \qquad (4.5)$$

Аналогічно

$$f(b) - f(x) \geq \sum_{k \in \{n: x \leq x_n < b\}} m_k. \qquad (4.6)$$

Додаючи нерівності (4.5) і (4.6), маємо:

$$f(b) - f(a) \geq \sum_{k \in \{n: x_n < b\}} m_k. \qquad (4.7)$$

Функція f неперервна зліва, тому вона неперервна в точці b. Тоді права частина (4.7) збігається із сумою

$$\sum_{k \geq 1} m_k = f(b) - f(a).$$

Таким чином, у (4.7) має місце рівність, тому й у співвідношенні (4.5) також. ∎

Отже, ми показали, що неперервна зліва неспадна функція стрибків з точністю до деякої сталої є функцією розподілу дискретної маси. Виявляється, з кожною неспадною неперервною зліва функцією також можна пов'язати деяку систему мас.

Означення 2. *Нехай f – неспадна на $[a; b]$ неперервна зліва функція. Будемо говорити, що f пов'язано із системою мас на $[a; b)$, якщо на кожному проміжку $[\alpha; \beta) \subset [a; b)$ зосереджено масу*

$$m([\alpha; \beta)) = f(\beta) - f(\alpha). \qquad (4.8)$$

Якщо при цьому $f(a) = 0$, то функція f називається функцією розподілу системи мас (4.8).

Відзначимо, що означення 2 містить у собі, як окремий випадок, поняття дискретної системи мас і функції розподілу дискретної маси.

Систему мас на $[a, b)$ можна уявляти так. Нехай уздовж відрізка $[a; b]$ розташований металевий стрижень, лінійна густина якого

може змінюватися від точки до точки. Крім того, у довільних точках стрижня (крім точки b) можуть бути вміщені гирьки з різними масами; цих точок може бути скінченна або зліченна множина. Загальна маса, зосереджена на $[a; b)$, є скінченною величиною $f(b)-f(a)$.

Приклад 2. Нехай стрижень розміщений уздовж відрізка $[0; 3]$ і має лінійну густину

$$p(x)=\begin{cases}p_1=1, x\in[0;1),\\ p_2=0, x\in[1;2),\\ p_3=2, x\in[2;3].\end{cases} \tag{4.9}$$

Крім того, у точки 0, $\frac{1}{2}$ і 2 вміщено гирьки масами 1, 1 і 2. Знайдемо функцію $f(x)$ розподілу цієї системи мас.

Початкове значення $f(0) = 0$. Нехай $x\in\left(0;\frac{1}{2}\right]$. Тоді

$$f(x)=m([0;x))=1+p_1x=1+x.$$

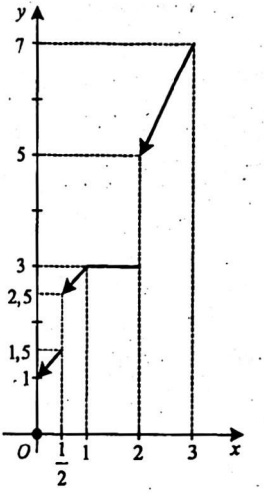
Якщо $x\in\left(\frac{1}{2};1\right]$, $f(x)=m([0;x))=1+1+p_1x=2+x$; якщо $x\in(1;2]$, $f(x)=f(1)+p_2(x-1)=3$; коли ж $x\in(2;3]$,

$f(x)=f(2)+2+p_3(x-2)=5+2(x-2)=2x+1$.

Остаточно

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ 1+x, & x\in\left(0;\frac{1}{2}\right],\\ 2+x, & x\in\left(\frac{1}{2};1\right],\\ 3, & x\in(1;2],\\ 2x+1, & x\in(2;3].\end{cases} \tag{4.10}$$

Графік функції f побудований на малюнку 12.



Мал. 12

Ми бачимо, що функція f не спадає і неперервна зліва. Вона має розрив у точках 0, $\frac{1}{2}$ і 2, де вміщено додаткові маси; її стрибки в цих точках дорівнюють цим масам. На ділянці [1; 2] функція розподілу стала. Тут її приріст дорівнює нулю, оскільки $m([1;2))=0$. На інтервалах $\left(0;\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2};1\right)$ графік лежить на прямих з кутовим коефіцієнтом 1, що відповідає густині p_1, а на інтервалі (2; 3) кутовий коефіцієнт дорівнює $p_3=2$. Тут маса наростає швидше, і графік функції розподілу є крутішим.

Завдання 1. Нехай $f(x) = x$, якщо $x \in [-1; 1]$, і $f(x) = 3x$, якщо $x \in (1; 2]$. Яка система мас пов'язана з цією функцією? Знайти відповідну функцію розподілу.

Завдання 2. Стрижень $[0; 1]$ має одиничну лінійну густину. Крім того, в точки $\left\{x_k = \frac{1}{k}, k \geq 2\right\}$, уміщені відповідно гирьки масами $m_k = 2^{-k}$. Знайти функцію розподілу заданої системи мас і побудувати її графік.

Досі ми обговорювали фізичний зміст означення 2. Тепер розглянемо його з математичних позицій.

Лема 1. *Нехай f — неспадна на $[a; b]$ неперервна зліва функція; m — пов'язана з нею система мас. Тоді для будь-якого проміжку $[\alpha; \beta) \subset [a; b]$ і його розбиття на проміжки $[\alpha_k; \alpha_{k+1})$, $k = \overline{1, l}$, які попарно не перетинаються, справедлива рівність* $m([\alpha; \beta)) = \sum_{k=1}^{l} m([\alpha_k; \alpha_{k+1}))$.

Доведення

Будемо вважати, що точки α_k занумеровані в порядку зростання: $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{l+1}$. При цьому $\alpha_1 = \alpha$; $\alpha_{l+1} = \beta$. Тоді

$$\sum_{k=1}^{l} m([\alpha_k; \alpha_{k+1})) = \sum_{k=1}^{l} (f(\alpha_{k+1}) - f(\alpha_k)) = f(\alpha_{l+1}) - f(\alpha_1) = m([\alpha; \beta)).$$

Зауваження. Сформульована в лемі 1 властивість називається *адитивністю*, або *скінченною адитивністю*, маси m. Її фізичний зміст полягає у тому, що маса тіла дорівнює сумі мас його частин. Відзначимо також, що під час обговорення прикладу 2 неявно було використано цю властивість.

Уважний читач, можливо, давно вже хоче запитати: навіщо в означенні 2 потрібна неперервність функції f зліва?

На емпіричному рівні відповідь така: якщо будувати реальні системи мас (дискретні системи або такі, як у прикладі 2), то функції

розподілу завжди виявляються неперервними зліва. Така відповідь, напевно, задовольнить фізика, але зовсім не достатня для математика.

Щоб прояснити суть справи, узагальнимо поняття скінченної адитивності.

Означення 3. *Нехай P – сім'я всіх проміжків виду $[\alpha;\beta)$ відрізка $[a;b]$ і μ – деяке відображення з P у проміжок $[0;+\infty)$. Це відображення називається зліченно-адитивним, якщо для будь-якої послідовності інтервалів $[\alpha_k;\alpha_{k+1})$, $k\geq 1$, які попарно не перетинаються і об'єднанням яких є проміжок $[\alpha;\beta)\in P$, справедлива рівність*

$$\mu([\alpha;\beta))=\sum_{k=1}^{\infty}\mu([\alpha_k;\alpha_{k+1})).$$



Іншими словами, ми допускаємо розбиття тіла на зліченну кількість частин; при цьому його маса повинна дорівнювати сумі мас частин. Відзначимо, що властивість зліченної адитивності було покладено А. М. Колмогоровим в основу аксіоматики-теорії ймовірностей. Андрій Миколайович Колмогоров (1903–1987) – видатний російський математик. Йому належать фундаментальні роботи з теорії міри, теорії наближення функцій, теорії множин, теорії ймовірностей і математичної логіки. Застосовував математичні методи у військовій справі, біології, лінгвістиці. Автор багатьох шкільних підручників.

Виявляється, неперервність зліва функції f забезпечує зліченну адитивність відображення m, заданого рівністю (4.8). Відзначимо, що скінченна адитивність завжди має місце, оскільки, доводячи лему 1, ми неперервністю не користувалися.

Лема 2. *Нехай f – неспадна на $[a;b]$ функція і відображення m: $P\to[0,\infty)$ визначено формулою (4.8). Відображення m зліченно-адитивне тоді і тільки тоді, коли f неперервна зліва.*

Доведення леми 2 складне і тут ми його не наводимо. Відзначимо тільки, що лема 4 § 3 і теорема 1 містять твердження, близькі до леми 2.

Отже, відповідь на запитання читача така: неперервність функції f зліва ми вимагаємо для того, щоб функція маси (4.8) була зліченно-адитивною. Ця умова є важливою тому, що властивість зліченної адитивності виконана в реально зконструйованих фізичних моделях системи мас на відрізку.

І тільки тепер ми підходимо до основного результату цього параграфа. Якою є структура монотонної на відрізку функції?

Звернімося до прикладу 2. Описану там систему мас можна розбити на дві: а) дискретну систему мас m_1, що складається з гирьок масами 1, 1, 2, уміщених у точках 0, $\frac{1}{2}$, 2; б) систему мас m_2 без гирьок зі щільністю (4.9). Неважко підрахувати, що функція розподілу першої системи мас дорівнює

$$f_1(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ 1, & 0<x\le\frac{1}{2},\\ 2, & \frac{1}{2}<x\le 2,\\ 4, & 2<x\le 3.\end{cases}$$

Функція розподілу другої системи мас є

$$f_2(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le 1,\\ 1, & 1<x\le 2,\\ 2x-3, & 2<x\le 3.\end{cases}$$

При цьому отримано розклад функції розподілу початкової системи мас (4.10) у вигляді $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, $x\in[0;3]$.

Іншими словами, отримано подання функції f у вигляді суми функції стрибків і неперервної монотонної функції. Виявляється, і в загальному випадку справедливий такий результат.

Теорема 2 (про розклад). *Нехай f – неспадна на $[a; b]$ функція. Тоді справедлива рівність*

$$f(x)=g(x)+h(x),\ x\in[a; b], \qquad (4.11)$$

де g – функція стрибків, що має стрибки в тих самих точках і тієї самої величини, що і функція f, а h – неперервна неспадна функція.

Завдання 3. Нехай виконано умови теореми 2 і f неперервна зліва. Довести, що функція g у рівності (4.11) також неперервна зліва.

Фізичне тлумачення теореми про розклад наступне. Нехай f – така неспадна на $[a; b]$ функція, що породжена нею, згідно з рівністю (4.8), система мас m є зліченно-адитивною. Тоді f за лемою 2 неперервна зліва; справедливий розклад (4.11) з неперервною зліва функцією стрибків g. Ця функція породжує деяку дискретну систему мас m_1, (див. теорему 1), а функція h породжує деяку систему мас m_2, у якій відсутні «гирьки». Для кожного проміжку $[\alpha; \beta)\subset[a; b]$ справедлива рівність

$$m([\alpha; \beta))=m_1([\alpha; \beta))+m_2([\alpha; \beta)). \qquad (4.12)$$

Зміст її полягає в тому, що ми із системи мас m видаляємо «гирьки» (вони утворюють систему мас m_1) і одержуємо систему мас m_2 – уже без «гирьок». Отже, розкладу (4.11) монотонної функції f відповідає розклад (4.12) системи мас на дискретну і неперервну складові.

Завдання 4. Дати фізичне тлумачення теореми 3 § 2.

Ця книжка присвячена монотонним і кусково-монотонним функціям. Однак існують функції зі значно складнішою структурою. Приклад розривної, ніде не монотонної функції Діріхле (завдання 7 § 2) частково підтверджує цю думку. Проте здається геометрично очевидним, що неперервна функція зобов'язана бути кусково-монотонною. Приклад, наведений нижче, переконує, що це не так.

Запишемо довільне число $x \in [0; 1]$ у системі числення з основою 3: $x = 0, x_1 x_2 ... x_n ...$ (про системи числення див. книжку С. В. Фоміна «Системы счисления» (М., 1968)). Покладемо $f(x) = 0, y_1 y_2 ... y_n ...$, де $f(x)$ записано в системі числення з основою 2, причому $y_1 = 1$ тоді і тільки тоді, коли $x_1 = 1$, $y_{n+1} = y_n$ у тому і лише тому випадку, коли $x_{n+1} = x_n$.

Виявляється, що f неперервна і не є монотонною в жодній точці відрізка [0; 1].

Завдання 5*. Довести вищевказані властивості функції f.

Вказівка. Перевірте коректність означення f, тобто справедливість рівності

$$f(0, x_1 x_2 ... x_n 222...) = f(0, x_1 x_2 ... x_{n-1} (x_n + 1) 000...),$$

де x_n дорівнює 0 або 1.

§ 5. Монотонність відносно квазіконуса і теорема Вейєрштрасса

Дійсні числа природним чином упорядковані за зростанням. У багатьох ситуаціях корисно ввести подібну упорядкованість для векторів площини або простору. Зробити це можна багатьма способами. Зафіксуємо в площині прямокутну декартову систему координат xOy.

Приклад 1. Для плоских векторів $\overline{r_1} = (x_1; y_1)$ і $\overline{r_2} = (x_2; y_2)$ будемо вважати, що $\overline{r_1} \le \overline{r_2}$ тоді і тільки тоді, коли одночасно $x_1 \le x_2$, $y_1 \le y_2$. Тим самим у площині введено відношення, що має багато спільних властивостей з відношенням «$\le$» на множині дійсних чисел.

Завдання 1. Довести, що для введеного в прикладі 1 відношення виконуються такі властивості:

$$\overline{r} \le \overline{r} \text{ для будь-якого } \overline{r}, \tag{5.1}$$

$$\text{якщо } \overline{r_1} \le \overline{r_2} \text{ і } \overline{r_2} \le \overline{r_1}, \text{ то } \overline{r_1} = \overline{r_2}, \tag{5.2}$$

$$\text{якщо } \overline{r_1} \le \overline{r_2} \text{ і } \overline{r_2} \le \overline{r_3}, \text{ то } \overline{r_1} \le \overline{r_3}, \tag{5.3}$$

$$\text{якщо } \overline{r_1} \le \overline{r_2} \text{ і } \alpha \ge 0, \text{ то } \alpha\overline{r_1} \le \alpha\overline{r_2}, \tag{5.4}$$

$$\text{якщо } \overline{r_1} \le \overline{r_2}, \text{ то для довільного } \overline{r_3} \text{ виконується } \overline{r_1} + \overline{r_3} \le \overline{r_2} + \overline{r_3}. \tag{5.5}$$

Завдання 2. Порядок у просторі $\mathbb{R}$ є лінійним, тобто для будь-яких $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ виконується або $\alpha \le \beta$, або $\alpha \ge \beta$. Перевірити, що відношення з прикладу 1 цієї властивості не має.

Відношення з властивостями (5.1–5.3) називається нестрогим порядком. Властивості (5.4), (5.5) погоджують уведене відношення з векторною структурою.

Розглянемо монотонні векторні послідовності. Послідовність $\{\overline{r}_n, n \ge 1\}$ називається *монотонно зростаючою* (щодо порядку з прикладу 1), якщо при кожному $n \ge 1$ справедлива нерівність $\overline{r}_n \le \overline{r}_{n+1}$.

Завдання 3. Послідовність $\{\overline{r}_n = (x_n; y_n), n \ge 1\}$ монотонно зростає тоді і тільки тоді, коли обидві координатні послідовності $\{x_n, n \ge 1\}$ і $\{y_n, n \ge 1\}$ не спадають. Довести.

З'ясуємо, чи справедлива для монотонних векторних послідовностей теорема Вейєрштрасса. Введемо поняття обмеженої плоскої множини і збіжної послідовності векторів.

Означення 1. *Множина A у площині називається обмеженою, якщо обмежені її проекції на координатні прямі.*

Зокрема, послідовність $\{\overline{r}_n = (x_n; y_n), n \ge 1\}$ обмежена тоді і тільки тоді, коли існує таке $c > 0$, що для всіх $n \ge 1$ мають місце нерівності: $|x_n| \le c$, $|y_n| \le c$.

Означення 2. *Векторна послідовність $\{\overline{r}_n = (x_n; y_n), n \ge 1\}$ збігається до вектора $\overline{r} = (x; y)$, якщо одночасно $x_n \to x$, $y_n \to y$, коли $n \to \infty$.*

Наприклад, послідовність

$$\left(\frac{1}{n}; \frac{n+1}{n}\right), n \ge 1,$$

збігається до вектора (0; 1), а послідовність

$$\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n; (-1)^n\right), n \ge 1,$$

до жодного вектора не збігається (тобто розбігається), оскільки послідовність других координат $\{(-1)^n,\ n\geq 1\}$ не має границі.

***Теорема* 1.** *Нехай* $\{\bar{r}_n=(x_n;y_n),\ n\geq 1\}$ *– обмежена послідовність, що монотонно зростає стосовно порядку з прикладу* 1. *Тоді вона збігається.*

Доведення

Відповідно до означення 1 для деякого $c>0$ при всіх $n\geq 1$ виконуються нерівності $|x_n|\leq c$, $|y_n|\leq c$, і обидві послідовності $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ обмежені. Згідно із завданням 3 вони не спадають. За теоремою Вейєрштрасса $x_n\to x$, $y_n\to y$, коли $n\to\infty$, де x, y – деякі числа. Тоді за означенням 2 $(x_n;y_n)\to(x;y)$, $n\to\infty$. ∎

Упорядкування з прикладу 1 допускає наступне узагальнення.

***Означення* 3.** *Нехай A – фіксована непорожня плоска множина. Покладаємо* $\bar{r}_1\leq\bar{r}_2$ *відносно A тоді і тільки тоді, коли* $(\bar{r}_2-\bar{r}_1)\in A$.

Завдання 4. Перевірити, що відношення з прикладу 1 породжується множиною $A=\{\bar{r}=(x;y)\,|\,x\geq 0,\ y\geq 0\}$.

Властивості (5.1) – (5.5) для введеного відношення легко описуються геометричними властивостями множини A. Випишемо їх:

$$\bar{0}\in A, \tag{5.6}$$

$$\text{якщо } \bar{a}\in A \text{ і } -\bar{a}\in A, \text{ то } \bar{a}=\bar{0}, \tag{5.7}$$

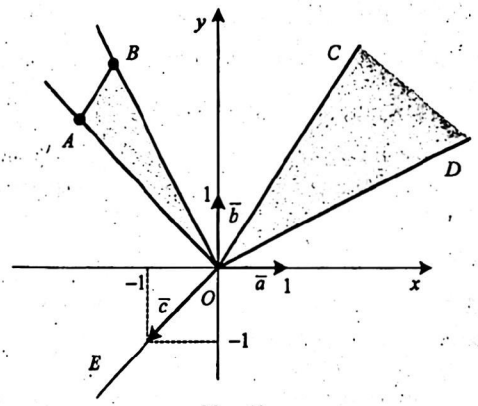
$$\text{якщо } \bar{a}\in A,\ \bar{b}\in A, \text{ то } \bar{a}+\bar{b}\in A, \tag{5.8}$$

$$\text{якщо } \bar{a}\in A,\ \alpha\geq 0, \text{ то } \alpha\bar{a}\in A. \tag{5.9}$$

Завдання 5. Перевірити, що властивість (5.1) для введеного в означенні 3 відношення рівносильна (5.6), (5.2) рівносильна (5.7), (5.3) рівносильна (5.8), (5.4) рівносильна (5.9), а властивість (5.5) для відношення з означення 3 завжди виконується. Довести також, що з (5.9) завжди випливає (5.1).

***Означення* 4.** *Непорожня множина A в площині називається квазіконусом, якщо для неї виконується* (5.9).

Квазіконус – це набір променів, що виходять з початку O системи декартових координат. Він породжує відношення «$\le$» з властивостями (5.1), (5.4), (5.5). Можна сказати, що в означення 4 включено найслабші вимоги, необхідні, щоб породжене відношення було погоджено з векторною структурою. Пояснимо ще сам термін. Конусом називається непорожня множина з властивостями (5.7) – (5.9). Квазіконус – це «майже» конус.



Мал. 13

На малюнку 13 $\angle COD$, включаючи його внутрішні точки, є конусом, а тому він є квазіконусом. Заштрихований ΔAOB не є квазіконусом, бо кінець вектора $\bar{r} = \overline{OA}$ належить цьому трикутнику, але кінець вектора $2\bar{r} = 2\overline{OA}$ вже не належить. Множина, утворена променями OA і OB, є квазіконусом і не є конусом (порушується вимога (5.8), бо кінець вектора $\overline{OA} + \overline{OB}$ не лежить на цих променях). Нарешті, вісь абсцис є квазіконусом і не є конусом (порушується вимога (5.7)).

Означення 5. *Послідовність* $\{\bar{r}_n,\ n \ge 1\}$ *монотонно зростає відносно квазіконуса* K, *якщо при кожному* $n \ge 1$ $\bar{r}_n \le \bar{r}_{n+1}$ *відносно* K, *тобто* $(\bar{r}_{n+1} - \bar{r}_n) \in K$, $n \ge 1$.

Означення 6. *Квазіконус K називається правильним, якщо породжене ним відношення задовольняє теорему Вейєрштрасса, тобто будь-яка монотонно зростаюча відносно K обмежена послідовність векторів збігається.*

Відповідно до теореми 1 перший квадрант є правильним квазіконусом. Однак не кожен квазіконус є правильним. Наведемо контрприклад.

Приклад 2. Квазіконус K містить пряму $l=\{a\bar{a},\ a\in\mathbb{R}\}$, де $\bar{a}$ – ненульовий вектор. Розглянемо послідовність $\left\{\bar{r}_n=(-1)^n\bar{a},\ n\geq 1\right\}$. Вона монотонно зростає відносно K, оскільки $\bar{r}_{n+1}-\bar{r}_n=2\cdot(-1)^{n+1}\bar{a}\in l\subset K$. Послідовність $\{\bar{r}_n\}$ обмежена і розбіжна. Отже, квазіконус у цьому випадку породжує відношення, для якого теорема Вейєрштрасса не виконується.

Наведемо інші приклади неправильних квазіконусів.

Приклад 3. Квазіконус K містить такі ненульові вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, що $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=\bar{0}$. Введемо послідовність

$$\bar{a},\ \bar{a}+\bar{b},\ \bar{0},\ \bar{a},\ \bar{a}+\bar{b},\ \bar{0},\ \bar{a},\ \ldots$$

Вона монотонно зростає відносно K, обмежена і розбігається (перевірте!).

Звернімося до малюнка 13. Проілюструємо приклад 3. Нехай квазіконус K_0 містить промені Ox, Oy і OE, де OE – бісектриса третього координатного кута. Тоді вектори $\bar{a}=(1;0)$, $\bar{b}=(0;1)$ і $\bar{c}=\left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$ містяться в K_0. Маємо $\bar{a}+\bar{b}=(1;1)$. Послідовність

$$(1;0),(1;1),\bar{0},(1;0),(1;1),\bar{0},(1;0),\ldots$$

зростає відносно K_0, обмежена і розбігається.

Приклад 4. Розглянемо деяку пряму AOB. Нехай квазіконус K містить промені, як завгодно близькі до променя OB, і промені, як завгодно близькі до променя OA. Направимо вектор $\bar{a}$ вздовж променя OB, тоді вектор $-\bar{a}$ піде вздовж OA. Введемо також вектор

$\bar{b} \perp \bar{a}$. Тоді в множині K можна виділити послідовність $\bar{p}_n = \bar{a} + \varepsilon_n \bar{b}$, де $|\varepsilon_n| \le \frac{1}{2^n}$, і послідовність $\bar{s}_n = -\bar{a} + \delta_n \bar{b}$, де $|\delta_n| \le \frac{1}{2^n}$. Ці послідовності формуються з напрямів, близьких до сторін розгорнутого кута AOB. Розглянемо послідовність $\{\bar{r}_n\}$ виду

$$\bar{p}_1,\ \bar{p}_1 + \bar{s}_1,\ \bar{p}_1 + \bar{s}_1 + \bar{p}_2,\ \bar{p}_1 + \bar{s}_1 + \bar{p}_2 + \bar{s}_2,\ \ldots$$

Вона монотонно зростає відносно K за побудовою. Вона обмежена, оскільки

$$\bar{r}_{2n} = (\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n + \delta_1 + \ldots + \delta_n)\bar{b},$$

$$\bar{r}_{2n+1} = \bar{a} + (\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{n+1} + \delta_1 + \ldots + \delta_n)\bar{b},$$

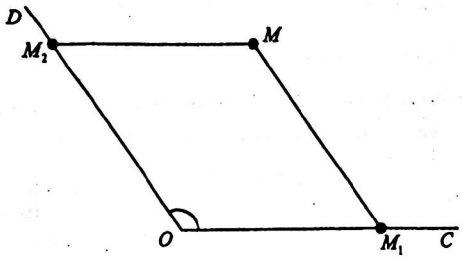
а сума вагових коефіцієнтів допускає оцінку

$$|\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n| \le \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n} < 1,$$

аналогічно – для сум δ_n. Пояснимо, чому $\{\bar{r}_n\}$ розбігається. Розглянемо нові декартові координати з початком у точці O. Нехай $\bar{a}$, $\bar{b}$ – додатні напрями нових осей абсцис і ординат. Тоді послідовність нових абсцис має вигляд 1, 0, 1, 0, ... і розбігається. Отже, послідовність $\{\bar{r}_n\}$, записана в нових координатах, розбігається. Геометрично очевидно, що введена в означенні 2 збіжність векторів не залежить від вибору декартової системи координат. Тому $\{\bar{r}_n\}$ розбігається й у сенсі означення 2. Квазіконус K – неправильний.

Наведемо досить загальний приклад правильного квазіконуса. Для цього розглянемо так звані косокутні декартові координати.

Нехай COD – деякий кут, менший за розгорнутий; M – довільна точка у внутрішній області кута COD. Через M проведемо відрізки $MM_1 \parallel OD$ і $MM_2 \parallel OC$ до перетину з променями CO і DO. Положення точки M будемо характеризувати парою довжин OM_1 і OM_2 (мал. 14). Якщо точка M лежить у зовнішній області кута COD, то проводимо аналогічну побудову, тільки точки M_1 або M_2 можуть лежати на продовженні сторін кута. При цьому одна чи обидві координати можуть бути від'ємними або обертатися в нуль.



Мал. 14

Така система координат називається *косокутною декартовою системою координат*. Прямокутні координати – це окремий випадок косокутних.

Завдання 6. Нехай у площині задано прямокутну систему координат xOy і косокутну систему координат COD. Розглянемо послідовність $\{M_n, n \geq 1\}$ точок площини і векторні послідовності $\{\overline{p}_n\}$ і $\{\overline{q}_n\}$ їх прямокутних і косокутних координат. Довести, що збіжність $\{\overline{p}_n\}$ і збіжність $\{\overline{q}_n\}$ рівносильні, причому їхнім границям $\overline{p}$ і $\overline{q}$ відповідає така точка M, що $\overline{p}$ – її координати в системі xOy, а $\overline{q}$ – координати в системі COD.

Вказівка. Виразіть косокутні координати через прямокутні, і навпаки.

Приклад 5. Нехай COD – деякий кут, менший за розгорнутий, K – внутрішність кута разом з його межею. Тоді K – правильний квазіконус.

Завдання 7. Довести останнє твердження.

Вказівка. Введіть косокутні декартові координати і застосуйте теорему 1 і завдання 6.

Розглянуті приклади підводять до наступної характеризації правильних квазіконусів.

Теорема 2. *Квазіконус K є правильним тоді й тільки тоді, коли K міститься у внутрішній області деякого кута $\varphi < \pi$.*

Доведення

Достатність. Нехай L – це внутрішність заданого кута $\varphi < \pi$ разом з його межею. Квазіконус L є правильним згідно із завданням 7. Тоді квазіконус K, що міститься в L, також є правильним.

Необхідність доведемо від супротивного. Нехай квазіконус K – правильний. Припустимо, що навколо нього не можна описати кут $\varphi < \pi$. Тоді має місце одна із ситуацій прикладу 3 або 4 (перевірте!). В обох випадках K не є правильним, що суперечить умові.

Узагальнення теореми 2 на випадок простору міститься у статті автора «Одна теорема про монотонну послідовність у скінченновимірному просторі» (Вісник Київського університету. Математика та механіка. – 1976.– № 18. – С. 35–40).



АНОНС КНИЖКИ

У серпні вийде з друку посібник для вчителів

А.Прус, В.Швець

ПРИКЛАДНА СПРЯМОВАНІСТЬ СТЕРЕОМЕТРІЇ

10–11 класи

Щоб бути успішним у сучасному житті, кожен випускник середньої школи повинен оволодіти прийомами математичної діяльності та навичками їх застосування до розв'язування прикладних задач. Тому навчання геометрії, і стереометрії зокрема, не повинно бути відірваним від реалій матеріального світу. Шкільний курс геометрії повинен мати яскраво виражену прикладну спрямованість, головне завдання якої – формування в учнів стійкої, особистісно значимої потреби у вивченні даного курсу. Тому одним із першочергових завдань вивчення стереометрії є забезпечення учнів такими математичними знаннями, вміннями та навичками, що будуть для них потрібними, корисними та застосовними у побуті, майбутній професійній діяльності.

У посібнику запропоновано концептуальну модель та методичні рекомендації щодо реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу стереометрії.

Цікавою є прикладна інформація, яку можна використати під час вивчення окремих тем.

Наприклад, серед додаткової та цікавої інформації, що дано у посібнику до теми «Геометричні тіла», є така.

«...Серед морських організмів, які мають форми геометричних фігур, є «скляні губки», у прозорій сітківці яких видно шість прямокутних осей, що відтворюють кристалічну форму *куба* або *окта-*

едра. До таких організмів належать і кубомедузи (або кубічні медузи)...»

«...Карл Іммерман у 1837 році відвідав робочу кімнату Йоганна Гете і побачив там «трикутник з картону, виготовлений самим поетом, причому Гете хотів продемонструвати на ньому співвідношення між душевними силами. Чуттєвість вважав він основою всіх решти; тому він зобразив її в основі трикутника і зафарбував в зелений колір. Зафарбована в темно-червоний колір бічна грань зображала фантазію, зафарбована в жовтий колір – здоровий глузд, у голубий – розум.

Був це, очевидно, не трикутник, а що? (Тетраедр)...»

Систематизованими, послідовними та повними є запропоновані добірки прикладних задач до кожної з тем шкільного курсу стереометрії. Серед задач, наприклад, така.

«Під час охолодження насиченої водяної пари від 15 °С до 14 °С з одного кубічного метра виділяється 0,75 г води. Вважаючи, що діаметр крапель, що при цьому утворюються, дорівнює 0,5 мм, обчислити, скільки крапель виділяється при такому охолодженні з кожного кубічного метра повітря насиченого водяною парою.

Розв'язання

Об'єм краплі дорівнює

$$\frac{1}{6}\pi \cdot 0{,}5^3 = \frac{1}{6} \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}125 \approx 0{,}065\ (\text{мм}^2).$$

Маса такої краплі дорівнює 0,065 мг. Тоді матимемо $0{,}75 \cdot 1000 : 0{,}065 = 11\,000$ (крапель).

Зауваження. Товщина дощових хмар вимірюється сотнями метрів. Це означає, що з кожного квадратного метра нижньої поверхні такої хмари випадають мільйони крапель».

Авторами наведено **методичні рекомендації** до здійснення прикладної спрямованості під час вивчення теоретичного матеріалу, що стосується аксіом стереометрії, паралельності та перпендикулярності прямих і площин у просторі, перетворень у просторі, геометричних тіл та їх комбінацій, зокрема призми, піраміди, циліндра, конуса та кулі.

ШКІЛЬНИЙ СВІТ

35263 Інформатика
35237 Фізика
35236 Математика
22064 Математика. Пільгова передплата на 6 і 12 міс.
22066 Хімія.
90228 Біологія
35251 Завуч
35264 Початкова освіта
40140 Українська мова та література
40141 Історія України
40142 Зарубіжна література
40343 Краєзнавство. Географія. Туризм
40690 Шкільний світ
40691 Директор школи
90227 Здоров'я та фізична культура
35266 Комплект газет «Шкільний світ»
Ціна комплекту на 38 % нижча від вартості окремо передплачених видань.
Не входять до комплекту
21616 Управління освітою
21617 Сільська школа України
35265 Дитячий садок
23675 Le français
23676 Deutsch
22055 English
23316 Психолог
91830 Школа
95517 Початкова освіта. Дидактичні матеріали
90224 Дефектолог
91815 Соціальний педагог
91468 Позашкілля
95536 English Junior
95538 Директор школи. Шкільний світ
95530 Дошкілля
91492 Дитячий садок + Дитячий садок. Мистецтво
91493 Дитячий садок + Дитячий садок. Управління

ПРЕДСТАВНИЦТВА В ОБЛАСТЯХ УКРАЇНИ

ВІННИЦЬКА
ГАВРИЛЮК Олена Андріївна
т.с.(0432) 32-76-66
т.м. 8-097-374-73-59

ВОЛИНСЬКА
МАЙКО Світлана Михайлівна
т.с.(03322) 4-71-52
т.м. 8-097-472-28-46

ДНІПРОПЕТРОВСЬКА
БАНКОВСЬКА Алла Аркадіївна
т.с.(056) 776-84-18
т.м. 8-096-373-18-33

ДОНЕЦЬКА
СЬОМОВА Раїса Сергіївна
т.д.(062) 304-21-14
т.м. 8-097-524-38-82

ЖИТОМИРСЬКА
БІЛЕЦЬКА Леся Володимирівна
т.с.(0412) 37-28-75
т.м. 8-097-325-82-18

ЗАПОРІЗЬКА
КРАТ Тетяна Іванівна
т.с. 8 (061) 220-04-57
т.м. 8-067-612-73-05

ІВАНО-ФРАНКІВСЬКА
СХОМОРОВСЬКА Наталя Богданівна
т.с. (03422) 3-11-84
т.м. 8-097-510-38-72

КІРОВОГРАДСЬКА
СУПРУН Людмила Миколаївна
т.с.(0522) 24-66-08
т.м. 8-093-849-04-81

ЛУГАНСЬКА
БОНДАРЕВА Людмила Миколаївна
т.с.(0642) 50-52-63
т.м. 8-097-482-54-58

ЛЬВІВСЬКА
СИНЬОВА Ірина Іванівна
т.с. (0322) 20-21-22
т.м.8-097-477-01-49

ОДЕСЬКА
АЦАБРИКА Ірина Федорівна
т.с.(048) 729-45-12
т.м. 8-067-785-61-56
АНТОНІШИНА Лілія Михайлівна
т.м. 8-097-265-25-40

ПОЛТАВСЬКА
СТАДНІК Світлана Михайлівна
т.с.(05322) 2-49-56
т.м. 8-097-512-29-74

РІВНЕНСЬКА
ПОДКОПАЄВА Тетяна Віталіївна
т.с.(0362) 22-22-02
т.м. 8-097-398-22-96

СУМСЬКА
ІВАНЕНКО Людмила Олександрівна
т.м. 8-066-234-57-81

м. СУМИ
СОБИНА Галина Дмитрівна
т.с. 8(0542) 34-88-90
т.м. 8-050-300-70-84

ТЕРНОПІЛЬСЬКА
СІНЬКОВСЬКА Інна Михайлівна
т.с.(0352) 43-57-83
т.м. 8-097-523-59-39

ХАРКІВСЬКА
СТОЛЯРЕНКО Галина Андріївна
т.с. (057)756-89-69
т.м. 8-097-502-03-86

ХЕРСОНСЬКА
ФОМІНА Лариса Анатоліївна
т.с. (0552) 41-08-11
т.м. 8-067-478-27-97

ЧЕРКАСЬКА
БОНДАРЕНКО Олена Андріївна
т.с.(0472) 64-95-22
т.м. 8-097-773-79-50

ЧЕРНІГІВСЬКА
ПЕТРОВА Олена Семенівна
т.с.(04622) 7-54-57
т.м. 8-097-513-33-94

ЧЕРНІВЕЦЬКА
МОРОЧКОВСЬКА Лариса Анатоліївна
т.с.(0372) 52-23-43
51-14-01
т.м. 8-097-386-50-57

м.БІЛА ЦЕРКВА
ТЕРЕХОВА Ольга Олександрівна
т.с. 8(04463) 5-30-52
т.м. 8-097-889-03-15

м. КИЇВ
НОВІКОВА Олена Павлівна
т.д. (044) 410-10-61
т.м. 8-067-387-89-61

м.СІМФЕРОПОЛЬ
ВАСЬКІВ Тетяна Федорівна
т.с. (0652) 27-33-70
т.м. 8-050-645-67-81

ГАЗЕТА МАТЕМАТИКА

Засновник
Благодійний фонд «Перше вересня»
Видавець: ФО-П Дубицький О.Є.

Свідоцтво серія КВ № 4503
від 23 серпня 2000 року.

Головний редактор
І.Соколовська,
заступник головного редактора
Л.Жовтун,
редактори В.Кириченко, Л.Товоля,
коректор Л.Воловецька,
набір Т.Погорілко,
верстка К.Яскевич

Редакція може не поділяти точки зору автора. Відповідають за достовірність фактів, цитат, власних назв, географічних назв та інших відомостей автори публікацій. Претензії щодо публікацій приймаються в письмовому вигляді впродовж 30 днів від часу виходу номера газети у світ. Рукописи не рецензуємо і не повертаємо. Рекламодавець відповідає за достовірність інформації, що в рекламі, за зміст та відповідність рекламних законодавству.

Наша адреса:
01014, м. Київ,
вул. Тимірязєвська, 2;
Тел: (+380 44) 537-32-00,
286-34-48, 284-92-81
E-mail: Matem@1veresnya.com.ua

© Благодійний фонд «Перше вересня», 2007.

Всі права захищені. Будь-яке відтворення матеріалів або фрагментів із них можливе лише за наявності письмового дозволу Благодійного фонду «Перше вересня».

Передплатний індекс «Математики» — 35238

Видрукувано з готових діапозитивів замовника ОП «Житомирська облдрукарня». Зам. 6919, наклад 6440.

МАТЕМАТИКА БІБЛІОТЕКА

Книжки II півріччя 2007 року

Липень

О.Руденко. ЯК НАВЧАТИ МИСЛИТИ ТА СПІЛКУВАТИСЯ. МАТЕМАТИКА: 5–6 класи: Спецкурс.

Спецкурс призначений навчити учнів основних прийомів роботи з математичними об'єктами, формувати у них навички роботи і спілкування на уроках математики. Використання у межах спецкурсу форм і методів соціоігрової педагогіки, інтерактивного навчання, технологій критичного мислення допоможе вчителю значно розширити горизонти звичайних уроків.

Для вчителів математики, студентів математичних спеціальностей вищих педагогічних навчальних закладів.

Серпень

А.Прус, В.Швець. ПРИКЛАДНА СПРЯМОВАНІСТЬ СТЕРЕОМЕТРІЇ: 10–11 класи: Посібник для вчителя.

Посібник містить як теоретичні відомості,так і конкретні практичні матеріали, що дають можливість реалізувати прикладну спрямованість стереометрії в старшій школі з довільним профілем навчання.

Для вчителів математики та учнів, викладачів і студентів математичних спеціальностей, а також для тих, хто пише підручники з геометрії для старшої школи.

Вересень

Я.Бродський, О.Павлов. СТАТИСТИКА, ЙМОВІРНІСТЬ, КОМБІНАТОРИКА. 7–9 класи.

Посібник присвячено впровадженню стохастичної змістової лінії в освіту учнів 7–9 класів. Навчання статистики, ймовірності, комбінаторики може бути як продовженням знайомства учнів із елементами стохастики, започаткованого у молодших класах, так і введенням учнів у світ випадкового, починаючи з 7-го класу. Посібник містить рекомендації стосовно змісту, методів, форм і засобів навчання. Наведені рекомендації можуть бути використані при реалізації як інваріантної, так і варіативної частини навчального плану.

Для вчителів математики та інших предметів, які вважають за необхідне впровадження ймовірнісно-статистичної змістової лінії у зміст шкільної освіти.

Передплатний індекс 35238