

СЕРІЯ «БІБЛІОТЕКА ЖУРНАЛУ
“МАТЕМАТИКА В ШКОЛАХ УКРАЇНИ”»

О. Г. Кукуш, Р. П. Ушаков

МАТЕМАТИЧНИЙ ГУРТОК

10-11 класи

ЧИСЛА. ПОСЛІДОВНОСТІ.
ФУНКЦІЇ

Харків
Видавнича група «Основа»
2018

УДК 51-8
К 89

Кукуш О. Г., Ушаков Р. П.

К 89 Математичний гурток. 10–11 класи. Числа. Послідовності. Функції / Олександр Кукуш, Рудольф Ушаков, — Х. : Вид. група «Основа», 2018. — 118, [10] с. (Б-ка журн. «Математика в школах України»; Вип. 10 (190)). ISBN 978-617-00-3503-5.

Пропонований посібник містить добірку статей, матеріали яких можна використовувати для проведення засідань математичного гуртка в 10–11-х класах та для підготовки учнів до участі в математичних олімпіадах, турнірах і конкурсах.

Для вчителів математики, студентів математичних спеціальностей та учнів, які бажають поглибити свої знання з математики.

УДК 51-8

ISBN 978-617-00-3503-5

© Кукуш О. Г., Ушаков Р. П., 2018
© ТОВ «Видавнича група “Основа”», 2018

Зміст

Від авторів	5
§ 1. Ще раз про число π	6
§ 2. Про наближене обчислення числа e	9
2.1. Збіжність послідовності $c_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$	9
2.2. Збіжність послідовностей $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ і $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$	10
2.3. Межі для логарифмічної та показникової функцій	12
2.4. Швидкість збіжності послідовності $\{a_n\}$	14
2.5. Швидкість збіжності послідовності $\{b_n\}$	16
2.6. Швидкість збіжності послідовності $\{c_n\}$	18
Література	19
§ 3. Про ірраціональні значення тригонометричних функцій	20
§ 4. Про деякі нерівності ітераційного виду	26
4.1. Метод згортання	26
4.2. Метод границь	27
4.3. Метод мажорювання	27
4.4. Загальні нерівності та приклади	29
Література	34
§ 5. Як знайти головний період функції	35
5.1. Періодичні функції та їх властивості	35
5.2. Головний період функції	40
5.3. Головний період суми функцій	44
5.4. Дослідження суми гармонійних коливань	48
5.5. Дослідження суми та тангенсів	51
Література	58
§ 6. Етюди про сім'ю функцій	59
Література	70
§ 7. Нерівності певного виду з модулем	71
7.1. Нерівності виду $\sum_{k=1}^n x - k \geq c$	72

7.2. Нерівності виду $\sum_{k=1}^n x - \gamma_k \geq c$	75
7.3. Нерівності виду $\sum_{k=1}^n a_k x - \gamma_k \geq c$, де $a_k > 0$	88
7.4. Нерівності виду $\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_k x - \gamma_k \geq c$	106
Література	118

Від авторів

Ця книжка — плід багаторічної співпраці шкільного вчителя математики та університетського викладача. Сподіваємось, що викладений матеріал буде корисним під час проведення математичних гуртків та підготовці до олімпіад.

Книжка містить сім параграфів. Матеріал перших у різні часи друкувався в журналах «У світі математики», «Математика в школах України», газеті «Математика».

У § 1 викладено яскраве доведення ірраціональності числа π . Це доведення належить американцю І. Нівену.

§ 2 присвячено вивченню швидкості збіжності класичних послідовностей до числа e . Цікавим є те, що вдалося отримати нові нерівності на кшталт такої: $\frac{e}{2n} - \frac{11e}{24n^2} < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{e}{2n}$, $n \in \mathbb{N}$.

У § 3 встановлено такий вражаючий факт: для додатних раціональних чисел r , менших від 90 , значення $\sin r^\circ$ є раціональним лише для $\sin 30^\circ$.

У § 4 вивчається поведінка послідовностей, утворених за допомогою багатьох радикалів. Зокрема, ви дізнаєтесь, до чого прямує число $\sqrt{1 + \sqrt{4 + \sqrt{4^2 + \dots + \sqrt{4^n}}}}$ зі зростанням кількості коренів.

§ 5 присвячено пошуку головного періоду тригонометричних функцій. Відгадати його буває нескладно, але довести, що немає меншого періоду, значно складніше.

У § 6 вивчається поведінка функцій $f_\lambda(x) = e^{\lambda \sin x} + e^{\lambda \cos x}$.

Коли зростає параметр λ , то з графіками цих функцій відбуваються дивовижні речі!

Заключний параграф містить цікаві нерівності з модулем. Як ви вважаєте, якими є розв'язки нерівності

$$|x-1| + 3|x-3| + \dots + 2009|x-2009| \geq 2|x-2| + 4|x-4| + \dots + 2008|x-2008|?$$

Книжку присвячено пам'яті Юрія Семеновича Татаренка — талановитого вчителя і чудової людини. Ю. С. Татаренко народився в Україні. Багато років він працював у м. Вісагінас (Литва), де заснував вечірню фізико-математичну школу. Статті, що лягли в основу § 1, 6, були написані спільно з ним.

§ 1. Ще раз про число π

Йтиметься про одну важливу властивість фундаментальної константи — числа $\pi = 3,141592\dots$

Відомо, що це число — ірраціональне. Наведемо елементарне доведення цього важливого факту, таке, що не виходить за межі шкільного курсу математики. Воно належить відомому американському математику Івану Нівену [Ivan Niven, Bulletin of the American Mathematical Society. — Vol. 53, 1947, p. 509].

Доведення проводиться методом від супротивного.

Припустимо, що число π — раціональне, тобто $\pi = \frac{a}{b}$, де a і b — деякі натуральні числа.

Розглянемо функцію $f(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.
Зауважимо, що

$$f\left(\frac{a}{b} - x\right) = f(x). \quad (1)$$

Справді,

$$f\left(\frac{a}{b} - x\right) = \frac{\left(\frac{a}{b} - x\right)^n \left(a - b\left(\frac{a}{b} - x\right)\right)^n}{n!} = \frac{(a-bx)^n x^n}{n!} = f(x).$$

Рівність (1) можна також записати у вигляді

$$f(\pi - x) = f(x). \quad (2)$$

Нехай $F(x) = f(x) - f''(x) + f^{(4)}(x) - \dots + (-1)^n f^{(2n)}(x)$.

Із рівності (2) випливає, що

$$f^{(2k)}(\pi - x) = f^{(2k)}(x), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Із рівностей (2) і (3) випливає, що

$$F(\pi - x) = F(x). \quad (4)$$

Нехай $g(x) = n!f(x) = x^n(a-bx)^n = a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \dots + a_{2n} x^{2n}$, де $a_n, a_{n+1}, \dots, a_{2n}$ — цілі числа.

ТЕОРЕМА. Функція $f(x)$ і всі її похідні набувають у точці $x = 0$ цілих значень.

Доведення

Помітимо, що $g(0) = f(0) = 0$, $g'(0) = g''(0) = \dots = g^{(n-1)}(0) = 0$, оскільки всі похідні функції $g(x)$ до $(n-1)$ -ї включно не мають вільного члена.

Отже, $f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$, $g^{(n)}(x) = a_n n!$,

$$g^{(n)}(0) = a_n n! = n! f^{(n)}(0) = 0, \text{ тому } f^{(n)}(0) = a_n \in \mathbb{Z}.$$

Далі, $g^{(n+1)}(0) = (n+1)! a_{n+1} = n! f^{(n+1)}(0)$.

Отже, $g^{(n+1)}(0) = (n+1) a_{n+1} \in \mathbb{Z}$; ...; $f^{(n+k)}(0) = \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k}$, тому

$$f^{(n+k)}(0) \in \mathbb{Z} \text{ для } k = 0, 1, \dots, n.$$

Теорему доведено.

За рівністю (3) маємо: $f^{(2k)}(\pi) = f^{(2k)}(0)$. Отже, $f^{(2k)}(\pi)$ — цілі числа для $k = 1, 2, \dots, n$.

Зауважимо, що $F(0)$ — ціле число, оскільки воно є сумою скінченної кількості цілих чисел. Отже, і $F(\pi)$ — ціле число (див. рівність (4)).

Розглянемо допоміжну функцію $\varphi(x) = F'(x) \sin x - F(x) \cos x$.

Маємо:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= F''(x) \sin x + F'(x) \cos x - F'(x) \cos x + F(x) \sin x = \\ &= (F''(x) + F(x)) \sin x. \end{aligned} \quad (5)$$

Оскільки $F''(x) = f''(x) - f^{(4)}(x) + f^{(6)}(x) - \dots + (-1)^{n+2} f^{(2n+2)}(x)$, то $F''(x) + F(x) = f(x) + (-1)^{n+2} f^{(2n+2)}(x)$.

З рівності (5) маємо: $\varphi'(x) = (f(x) + (-1)^{n+2} f^{(2n+2)}(x)) \sin x$.

Оскільки $f(x)$ — многочлен $2n$ -го степеня, то

$$f^{(2n+2)}(x) = 0 \text{ і } \varphi'(x) = f(x) \sin x.$$

З останньої рівності випливає, що

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(x) \sin x dx &= \varphi(x) \Big|_0^\pi = \varphi(\pi) - \varphi(0) = \\ &= F'(\pi) \sin \pi - F(\pi) \cos \pi - F'(0) \sin 0 + F(0) \cos 0 = F(\pi) + F(0). \end{aligned}$$

Отже, $\int_0^\pi f(x) \sin x dx$ — ціле число.

Зауважимо, що

$$f'(x) = \frac{1}{n!} n x^{n-1} (a - bx)^{n-1} (a - 2bx) = \frac{b^2}{(n-1)!} x^{n-1} (\pi - x)^{n-1} (\pi - 2x).$$

На проміжку $[0; \pi]$ рівність $f'(x) = 0$ виконується для таких значень x : $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$, $x_3 = \pi$.

Якщо $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то $f'(x) > 0$; якщо $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, то $f'(x) < 0$.

Отже, $x = \frac{\pi}{2}$ — точка абсолютного максимуму:

$$\max_{x \in [0; \pi]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{(\pi a)^n}{2^{2n} n!}.$$

Тому для $x \in (0; \pi)$ виконуються нерівності:

$$0 < f(x) \sin x \leq \frac{(\pi a)^n}{2^{2n} n!} < \frac{(\pi a)^n}{n!}, \quad n \geq 1. \quad (6)$$

Розглянемо послідовність із загальним членом $u_n = \frac{(\pi a)^n}{n!}$.

Зрозуміло, що $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Із нерівностей (6) випливає, що для достатньо великого n виконується

$$0 < f(x) \sin x < \frac{1}{\pi}. \quad (7)$$

Із нерівностей (7) випливає, що $0 < \int_0^{\pi} f(x) \sin x dx < \frac{1}{\pi} (\pi - 0) = 1$.

Але раніше було доведено, що $\int_0^{\pi} f(x) \sin x dx$ — ціле число.

Ми прийшли до суперечності, оскільки на інтервалі $(0; 1)$ немає жодного цілого числа.

Отже, число π — ірраціональне.

§ 2. Про наближене обчислення числа e

Зазвичай число e (основу натуральних логарифмів) вводять як границю послідовності

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \geq 1. \quad (1)$$

При цьому також розглядають пов'язану з нею послідовність

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad n \geq 1 \quad (2)$$

і доводять, що послідовність $\{a_n\}$ зростаюча, а $\{b_n\}$ — спадна (див. [2]).

Покажемо, що число e може бути введене як границя послідовності

$$c_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}, \quad n \geq 1. \quad (3)$$

Потім доведемо, що до такої самої границі збігається і послідовність $\{a_n\}$. Запропонований спосіб дає змогу уникнути дослідження послідовностей (1) та (2) на монотонність. Далі отримаємо точні двосторонні межі для відхилень усіх трьох послідовностей від числа e . Ці межі є в [1], але для повноти викладу наведемо їх тут. Виявляється, що послідовність $\{c_n\}$ значно швидше збігається, ніж інші дві. Тому для наближеного обчислення числа e краще використовувати саме її.

2.1. ЗБІЖНІСТЬ ПОСЛІДОВНОСТІ $c_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$

ЛЕМА 1. Послідовність $\{c_n\}$ зростає і обмежена зверху.

Доведення

Маємо $c_{n+1} - c_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$, тому $\{c_n\}$ зростає.

Далі,

$$c_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < \left(2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) + \frac{1}{2^{n-1}} =$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{2}{2^{n-1}} = \left(2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} \right) + \frac{1}{2^{n-2}} = \\
 &= \left(2 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-3}} \right) + \frac{1}{2^{n-3}} = \dots = \left(2 + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} = 3.
 \end{aligned}$$

Отже, усі члени послідовності менші від 3.

Із леми випливає, що послідовність $\{c_n\}$ збіжна. Границя цієї послідовності позначається буквою e на честь видатного швейцарського і російського математика Леонарда Ейлера. Маємо $2 = c_1 \leq c_n < 3$, тому $2 \leq e \leq 3$.

2.2. ЗБІЖНІСТЬ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \quad \text{і} \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1}$$

ЛЕМА 2. При $n \geq 2$ виконується нерівність

$$c_n > a_n, \quad (4)$$

причому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n - a_n) = 0. \quad (5)$$

Доведення

За біномом Ньютона для послідовності (1) маємо

$$\begin{aligned}
 a_n &= 1 + C_n^1 \cdot \frac{1}{n} + C_n^2 \cdot \frac{1}{n^2} + \dots + C_n^n \cdot \frac{1}{n^n} = \\
 &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \frac{n(n-1)}{n^2} + \dots + \frac{1}{k!} \cdot \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} + \dots + \frac{1}{n!} \cdot \frac{n!}{n^n}.
 \end{aligned}$$

Тоді $a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \frac{n^2}{n^2} + \dots + \frac{1}{k!} \cdot \frac{n^k}{n^k} + \dots + \frac{1}{n!} = c_n$, $n \geq 2$, і нерівність

(4) доведено.

Коли $n \geq 2$, матимемо $c_n - a_n = \sum_{k=2}^n \frac{\delta_n(k)}{k!}$, де

$$\delta_n(k) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n} \right).$$

Зауважимо, що $0 < \delta_n(k) < 1$, причому при кожному $k \geq 2$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(k) = 0. \quad (6)$$

Нехай $m \geq 2$. Тоді при $n \geq m+1$ матимемо

$$c_n - a_n < \sum_{k=2}^m \frac{\delta_n(k)}{k!} + \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Але остання сума менша від $\sum_{k=m+1}^n \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^{m-1}}$, тому

$$0 < c_n - a_n < \sum_{k=2}^m \frac{\delta_n(k)}{k!} + \frac{1}{2^{m-1}}, \quad (7)$$

За означенням границі доведемо (5). Нехай $\varepsilon > 0$ задано. Оскільки $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{m-1}} = 0$, то існує такий номер $p \geq 2$, що $\frac{1}{2^{p-1}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Тоді з (7) при $n \geq p+1$ матимемо

$$0 < c_n - a_n < \sum_{k=2}^p \frac{\delta_n(k)}{k!} + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (8)$$

Але внаслідок (6) сума у правій частині (8) прямує до 0, коли $n \rightarrow \infty$, тому вона стає меншою від $\frac{\varepsilon}{2}$ при всіх $n \geq n_0$, де n_0 залежить від ε , $n_0 \geq p+1$. Тоді $0 < c_n - a_n < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ при всіх $n \geq n_0$, звідки $|c_n - a_n| = c_n - a_n < \varepsilon$. Згідно з означенням границі, рівність (5) правильна.

Вправа 1. Довести, що $c_n - a_n < \frac{e}{2n}$, $n \geq 1$.

Указівка. Оцініть $\delta_n(k)$ за допомогою нерівності Бернуллі

$$(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \dots (1 + \alpha_k) \geq 1 + \alpha_1 + \dots + \alpha_k,$$

де $\alpha_n > -1$, $1 \leq n \leq k$, і всі α_n одного знака (цю нерівність можна довести за індукцією).

Послідовність $\{a_n\}$ можна подати у вигляді $a_n = c_n - (c_n - a_n)$, звідки $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n - \lim_{n \rightarrow \infty} (c_n - a_n) = e - 0 = e$.

Нарешті, послідовності (1) і (2) пов'язані рівністю $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) a_n$,

тому $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \cdot e = e$.

Отже, усі три послідовності (1)–(3) збігаються до e .

Надалі вважатимемо відомим, що послідовність $\{a_n\}$ зростає, а $\{b_n\}$ спадає. Тоді

$$a_n \leq c_n < e < b_n, \quad n \geq 1, \quad (9)$$

причому, коли $n \geq 2$, у (9) досягається строга нерівність.

При додатних x число $\log_e x$ позначають через $\ln x$ і називають *натуральним логарифмом* числа x . Надалі користуватимемося властивостями логарифмічної функції $y = \ln x$, $x > 0$, зокрема тим, що її похідна дорівнює $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Показникова функція $y = e^x$ відіграє особливу роль у математиці. Вона не змінюється під час диференціювання: $(e^x)' = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Іноколи замість e^x пишуть $\exp(x)$.

Вправа 2. Довести, що $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$, $n \geq 1$.

Вправа 3. Довести, що $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} < \ln n < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$, $n \geq 2$.

Указівка. Використати вправу 2.

2.3. МЕЖІ ДЛЯ ЛОГАРИФМІЧНОЇ ТА ПОКАЗНИКОВОЇ ФУНКЦІЙ

Означення 1. Нехай $\{a_n, b_n; n \geq 1\}$ — дві послідовності, причому всі члени послідовності $\{b_n\}$ відмінні до 0. Кажуть, що послідовність $\{a_n\}$ як завгодно мала порівняно з послідовністю $\{b_n\}$, якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$. Позначають це так: $a_n = o(b_n)$, $n \rightarrow \infty$.

Аналогічне поняття вводиться і для функцій.

Означення 2. Нехай x_0 — дійсне число, $f(x)$ і $g(x)$ — дві функції, визначені при $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, причому при всіх таких x функція $g(x) \neq 0$. Кажуть, що функція $f(x)$ як завгодно мала порівняно з функцією $g(x)$, якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Позначають це так: $f(x) = o(g(x))$, $x \rightarrow x_0$.

Вправа 4. Довести, що коли $\alpha < \beta$, $|x|^\beta = o(|x|^\alpha)$, $x \rightarrow 0$.

Вправа 5. Перевірити, що при $\alpha < \beta$ виконуються рівності:

$$n^\alpha = o(n^\beta), \quad \frac{1}{n^\beta} = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \quad n^\alpha = o(e^n), \quad n \rightarrow \infty.$$

При $k \geq 1$ справедливі такі співвідношення (див. [1]), які називаються розкладами за формулою Тейлора із залишковим членом у формі Пеано:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{k+1} x^k + o(x^k), \quad x \rightarrow 0, \quad (10)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + o(x^k), \quad x \rightarrow 0. \quad (11)$$

Формули (10) і (11) наштовхують на думку, що логарифмічна та показникові функції можуть бути оцінені через многочлени.

ЛЕМА 3. Якщо $k \geq 1$, $x > 0$, то

$$p_{2k}(x) < \ln(1+x) < p_{2k+1}(x), \quad (12)$$

$$\text{де } p_{2k}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^{2k}}{2k}, \quad p_{2k+1}(x) = p_{2k}(x) + \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Доведення

При $x = 0$ у нерівності (12) скрізь досягається рівність. При $x > 0$ перевіримо відповідну нерівність для похідних:

$$p'_{2k}(x) < (\ln(1+x))' < p'_{2k+1}(x). \quad (13)$$

Справді, (13) рівносильна нерівності

$$1 - x + x^2 - \dots - x^{2k-1} < \frac{1}{1+x} < 1 - x + x^2 - \dots + x^{2k},$$

або за формулою суми членів геометричної прогресії

$$\frac{1 - (-x)^{2k}}{1 - (-x)} < \frac{1}{1+x} < \frac{1 - (-x)^{2k+1}}{1 - (-x)},$$

а це рівносильно правильній нерівності $1 - x^{2k} < 1 < 1 + x^{2k+1}$, $x > 0$.

Отже, справедливість (13) *доведено*.

Тоді неперервна функція $g(x) = \ln(1+x) - p_{2k+1}(x)$, $x \geq 0$, має додатну похідну, коли $x > 0$, і отже, зростає при $x \in [0; +\infty)$. Тому, коли $x > 0$, маємо $g(x) > g(0) = 0$, і перша з нерівностей (12) доведена. Друга нерівність у (12) доводиться аналогічно з використанням другої нерівності з (13).

Вправа 6. Довести, що

$$\ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}, \quad k \geq 1, \quad -1 < x < 0.$$

Із розкладу (11) випливає, що при $k \geq 0$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \dots + (-1)^k \frac{x^k}{k!} + o(x^k), \quad x \rightarrow 0.$$

Це підказує такі нерівності.

ЛЕМА 4. Якщо $k \geq 0$ і $x > 0$, то $q_{2k+1}(x) < e^{-x} < q_{2k}(x)$,

$$\text{де } q_{2k}(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \dots + \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad q_{2k+1}(x) = q_{2k}(x) - \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Доведення

Позначимо $h_{2k}(x) = q_{2k}(x) - e^{-x}$, $h_{2k+1}(x) = e^{-x} - q_{2k+1}(x)$, $x \geq 0$, $k \geq 0$.

Зауважимо, що $q'_{2k+1}(x) = -q_{2k}(x)$, $q'_{2k+2}(x) = -q_{2k+1}(x)$, тому $q'_n(x) = -q_{n-1}(x)$, $n \geq 1$. Звідси $h'_n(x) = h_{n-1}(x)$, $n \geq 1$.

Методом математичної індукції доведемо, що при $n \geq 0$

$$h_n(x) > 0, \quad x > 0. \quad (14)$$

1°. Маємо $h_0(x) = 1 - e^{-x} > 0$ при додатних x .

2°. Припустимо, що при деякому фіксованому $n \geq 0$ нерівність (14) виконується. Доведемо, що $h_{n+1}(x) > 0$, $x > 0$. Функція h_{n+1} неперервна на $[0; +\infty)$, причому при $x > 0$ за припущенням індукції $h'_{n+1}(x) = h_n(x) > 0$. Тому $h_{n+1}(x)$ зростає на $[0; +\infty)$ і $h_{n+1}(x) > h_{n+1}(0) = 0$, коли $x > 0$.

Ми здійснили крок індукції, що і доводить справедливості нерівності (14) при всіх $n \geq 0$.

Вправа 7. Довести, що $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^k}{k!}$, $k \geq 0$, $x > 0$.

2.4. ШВИДКІСТЬ ЗБІЖНОСТІ ПОСЛІДОВНОСТІ $\{a_n\}$

Нехай $d_n = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \geq 1$. Згідно з (9) це послідовність додатних чисел. Використовуючи розклади (10), (11), легко отримати відповідний розклад для d_n .

$$\text{Маємо } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)},$$

$$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) = 1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Далі, $\frac{d_n}{e} = 1 - \exp\left(-\frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$.

Послідовність $x_n = -\frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2}$ під знаком експоненти прямує до 0. Тому $\frac{d_n}{e} = 1 - \left(1 + x_n + \frac{x_n^2}{2} + o(x_n^2)\right)$. Зрозуміло, що $o(x_n^2) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$,

тому $\frac{d_n}{e} = \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$,

$$\frac{d_n}{e} = \frac{1}{2n} - \frac{11}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (15)$$

Співвідношення (15) є асимптотичним розкладом відносної похибки $\frac{d_n}{e}$ при наближеному обчисленні числа e за допомогою послідовності $\{a_n\}$. Проте (15) нічого не каже про похибку наближення для конкретних n .

ТЕОРЕМА 1. При кожному $n \geq 1$ справедлива нерівність

$$\frac{1}{2n} - \frac{11}{24n^2} < \frac{e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{e} < \frac{1}{2n}. \quad (16)$$

Доведення

Виберемо число y так, щоб $\frac{d_n}{e} = 1 - e^{-y}$, тобто $y = 1 - n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Із леми 3 випливає, що $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ при $x > 0$,

а отже, $\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} < 1 - \frac{1}{x} \ln(1+x) < \frac{x}{2}$.

Звідси при $x = \frac{1}{n}$ матимемо

$$\frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2} < 1 - n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = y < \frac{1}{2n}. \quad (17)$$

Далі, за лемою 4,

$$y - \frac{y^2}{2} < 1 - e^{-y} < y. \quad (18)$$

Ураховуючи, що функція $\phi(z) = z - \frac{z^2}{2}$ зростає, коли $0 < z < 1$, з нерівностей (17) і (18) матимемо

$$\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2}\right)^2 < \frac{d_n}{e} < \frac{1}{2n}. \quad (19)$$

Другу нерівність у (16) доведено.

Ліва частина нерівності (19) дорівнює $\frac{1}{2n} - \frac{11}{24n^2} + \left(\frac{1}{6n^3} - \frac{1}{18n^4}\right)$.

Вираз у дужках при $n \geq 1$ додатний, тому з (19) матимемо

$$\frac{d_n}{e} < \frac{1}{2n} - \frac{11}{24n^2}.$$

Зауважимо, що нерівність (16) точна. Справді, у нерівності $\frac{d_n}{e} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$ стали $\frac{1}{2}$ не можна замінити на меншу, а в нерівності $\frac{d_n}{e} > \frac{1}{2n} - \frac{11}{24} \cdot \frac{1}{n^2}$ стали $\frac{11}{24}$ також не можна замінити на меншу. Це впливає з розкладу (15).

Теорема 1 показує, що послідовність $\{a_n\}$ прямує до числа e дуже повільно. Нехай нам треба обчислити e з точністю до $\varepsilon = 0,1$. Знайдемо таке n , що $e - a_n \leq \varepsilon$. Необхідною умовою цього є нерівність $e \left(\frac{1}{2n} - \frac{11}{24n^2}\right) \leq \varepsilon$, а достатньою — нерівність $\frac{e}{2n} \leq \varepsilon$. Обидві ці нерівності рівносильні, коли $n \geq 14$. Тому шукана точність забезпечується, починаючи лише з $n = 14$.

Наведемо значення деяких членів послідовності $\{a_n\}$:

$$a_1 = 2, \quad a_5 = 2,488..., \quad a_8 = 2,5657..., \quad a_{50} = 2,6915..., \quad a_{100} = 2,7169, \\ a_{500} = 2,71556..., \quad a_{1000} = 2,7169...$$

Нижче буде вказаний точніший метод наближеного обчислення числа e .

2.5. ШВИДКІСТЬ ЗБІЖНОСТІ ПОСЛІДОВНОСТІ $\{b_n\}$

Покладемо $f_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - e$, $n \geq 1$. Із нерівності (9) випливає, що $f_n > 0$, $n \geq 1$.

Вправа 8. Довести, що коли $n \rightarrow \infty$, то

$$\frac{f_n}{e} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (20)$$

Указівка. Використайте розклади (10), (11) або співвідношення

$$f_n = \frac{e}{n} - \left(1 + \frac{1}{n}\right) d_n.$$

Порівнюючи розклади (15), (20), бачимо, що послідовність $\{a_n\}$ трохи швидше за $\{b_n\}$ збігається до числа e .

Виходячи з розкладу (20), можна сподіватися, що виконується нерівність

$$y_n := \frac{1}{2n} - \frac{1}{24n^2} < \frac{f_n}{e} < \frac{1}{2n} =: z_n. \quad (21)$$

Справді, чисельний експеримент показує, що при $1 \leq n \leq 11$ нерівність (21) справджується (див. таблицю).

Таблиця

n	$10^3 y_n$	$10^3 \frac{f_n}{e}$	$10^3 z_n$
1	458,333	471,518	500
2	239,583	241,593	250
3	162,037	162,681	166,667
4	122,396	122,679	125
5	98,333	98,482	100
6	82,176	82,264	83,333
7	70,578	70,634	71,429
8	61,849	61,887	62,5
9	55,041	55,068	55,556
10	49,583	49,603	50
11	45,11	45,125	45,455

ТЕОРЕМА 2. При $n \geq 1$ виконується нерівність

$$\frac{1}{2n} - \frac{1}{24n^2} < \frac{f_n}{e} < \frac{1}{2n}. \quad (22)$$

Накреслимо етапи **доведення**.

1. З огляду на таблицю, встановимо справедливість нерівності (22), коли $n \geq 12$.
2. Подамо b_n у вигляді

$$b_n = \exp\left((n+1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) < \exp\left((n+1)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3}\right)\right).$$

3. Для доведення, що останнє число менше від $e\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$, встановимо при $x = \frac{1}{n}$ справедливність нерівності

$$\exp\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{3}\right) < 1 + \frac{x}{2}. \quad (23)$$

4. Логарифмуємо нерівність (23) і використаємо оцінку

$$\ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) > \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}, \text{ тоді (23) виконується, коли } n \geq 8. \text{ Тому при } n \geq 9 \text{ доведено, що } \frac{f_n}{e} < \frac{1}{2n}.$$

5. Оцінимо b_n знизу: $b_n > \exp\left((n+1)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4}\right)\right)$.

6. Для доведення, що цей вираз менший від $e\left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{24n^2}\right)$, встановлюємо при $x = \frac{1}{n}$ справедливність нерівності

$$\exp\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{12} - \frac{x^4}{4}\right) > 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{24}.$$

7. Логарифмуємо цю нерівність і використаємо оцінку

$$\ln(1+z) < z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3}, \quad z > 0, \text{ у якій покладемо } z = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{24} > 0.$$

8. Перевіряємо, що $z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} \leq \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{12} - \frac{x^4}{4}$ при $n \geq 12$.

Зауваження. Розклад (20) показує, що сталі $\frac{1}{2}, \frac{1}{24}$ у нерівності (22) не можна покращити.

2.6. ШВИДКІСТЬ ЗБІЖНОСТІ ПОСЛІДОВНОСТІ $\{c_n\}$

ТЕОРЕМА 3. Для послідовності (3) при кожному $n \geq 1$ справедлива нерівність

$$\frac{1}{(n+1)!} < e - c_n < \frac{1}{n! \cdot n}. \quad (24)$$

Доведення

Із нерівності (9) маємо

$$e - c_n > c_{n+1} - c_n = \frac{1}{(n+1)!}.$$

Друга нерівність у співвідношенні (24) доводиться дещо складніше. Коли $p \geq 1$, то

$$\begin{aligned} c_{p+n} - c_n &= \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots + \frac{1}{(n+2)(n+3)\dots(n+p)} \right) \geq \\ &\geq \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+2)^{p-1}} \right). \end{aligned}$$

Вираз у дужках менший від суми всіх членів нескінченно спадної геометричної прогресії з першим членом 1 і знаменником

$$q = \frac{1}{n+2}, \text{ яка дорівнює } S = \frac{1}{1-q} = \frac{n+2}{n+1}. \text{ Тоді}$$

$$c_{p+n} - c_n < \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{n+2}{n(n+2)+1} < \frac{1}{n! \cdot n}.$$

$$\text{Звідси } \lim_{p \rightarrow \infty} (c_{p+n} - c_n) = e - c_n \leq \frac{n+2}{(n+1)!(n+1)} < \frac{1}{n! \cdot n}.$$

Нерівність $e - c_n < \frac{1}{n! \cdot n}$ доведено.

Як бачимо, послідовність $\{c_n\}$ прямує до e значно швидше, ніж послідовність $\{a_n\}$. Наведемо значення кількох членів послідовності $\{c_n\}$:

$$\begin{aligned} c_1 &= 2, \quad c_2 = 2,5, \quad c_3 = 2,66\dots, \quad c_4 = 2,708\dots, \quad c_5 = 2,716\dots, \\ c_8 &= 2,718278\dots, \quad c_9 = 2,7182815\dots, \quad c_{10} = 2,718281801\dots, \\ c_{11} &= 2,718281826\dots, \quad c_{12} = 2,71828182849045\dots \end{aligned}$$

(Усі наведені цифри з десяткового розкладу збігаються з відповідними цифрами розкладу числа e .)

Вправа 9. Довести, що $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n \cdot n!}$, де $0 < \theta_n < 1$.

Вправа 10. Довести, що число e ірраціональне.

Указівка. Використати вправу 9.

ЛІТЕРАТУРА

1. Дороговцев А. Я. Математический анализ. Краткий курс в современном изложении. — К. : Факт, 2004.
2. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. — М. : Физматгиз, 1962.

§ 3. Про ірраціональні значення тригонометричних функцій

Пропонуємо доведення цікавого факту про ірраціональність значень тригонометричних функцій, але спочатку розглянемо такі задачі.

Задача 1. Довести, що $\sin 10^\circ$ ірраціональне число.

Доведення

У тотожності $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ покладемо $\alpha = 10^\circ$. Матимемо $\sin 30^\circ = 3\sin 10^\circ - 4\sin^3 10^\circ$, або $8x^3 - 6x + 1 = 0$, де $x = \sin 10^\circ$.

У цьому рівнянні виконаємо заміну $y = 2x$: $y^3 - 3y + 1 = 0$.

Отже, додатне число $y = 2\sin 10^\circ$ задовольняє отримане рівняння. Але в цьому рівнянні старший коефіцієнт дорівнює 1, тому, коли додатне раціональне число r є його коренем, воно обов'язково є натуральним числом і дільником вільного члена 1, тобто $r = 1$. Проте легко перевірити, що число $r = 1$ не задовольняє рівняння, тому воно не має додатних раціональних коренів.

Отже, число $y = 2\sin 10^\circ$ є ірраціональним, звідки $\sin 10^\circ$ також є ірраціональним.

Розглянемо деякі кути, які вимірюються цілим числом градусів. Маємо $\sin 10^\circ = \cos 80^\circ$, тому $\cos 80^\circ$ — також ірраціональне число.

Із тотожності $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ випливає, що коли $\cos 2\alpha$ — ірраціональне число, то і $\cos\alpha$ — також число ірраціональне. Отже, числа $\cos 40^\circ$, $\cos 20^\circ$, $\cos 10^\circ$, $\cos 5^\circ$ — ірраціональні. Відповідно ірраціональними є числа $\sin 50^\circ$, $\sin 70^\circ$, $\sin 80^\circ$, $\sin 85^\circ$.

Розглянемо ще один приклад.

Задача 2. Довести, що $\sin 18^\circ$ ірраціональне число.

Доведення

Нехай $\alpha = 18^\circ$, тоді $5\alpha = 90^\circ$, звідки $\sin 2\alpha = \cos 3\alpha$.

Перетворимо останню рівність: $2\sin\alpha\cos\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ або $4\sin^2\alpha + 2\sin\alpha - 1 = 0$.

Ураховуючи, що $\sin\alpha > 0$, отримуємо $\sin 18^\circ = \sin\alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$.

Якщо припустити, що $r = \sin 18^\circ \in \mathbb{Q}$, то $\sqrt{5} = 4r + 1 \in \mathbb{Q}$. Але відомо, що $\sqrt{5}$ є числом ірраціональним. Отримана суперечність доводить, що $\sin 18^\circ$ — ірраціональне число.

Оскільки $\sin 18^\circ = \cos 72^\circ$, то ірраціональними є також числа $\cos 72^\circ$, $\cos 36^\circ$, $\cos 9^\circ$ і числа $\sin 54^\circ$, $\sin 72^\circ$, $\sin 81^\circ$.

Із тотожності $\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$ випливає, що коли $\cos 3\alpha$ — ірраціональне число, то і $\cos \alpha$ — число ірраціональне. Отже, числа $\cos 24^\circ$, $\cos 12^\circ$, $\cos 8^\circ$, $\cos 6^\circ$, $\cos 4^\circ$, $\cos 3^\circ$, $\cos 1^\circ$ — ірраціональні.

Продовжуючи міркування, можна довести, що $\cos n^\circ$ — число ірраціональне, коли $n = 1, 2, \dots, 88, 89$ і $n \neq 60$. Цей результат можна узагальнити.

Задача 3. (А. Я. Дороговцев. Математический анализ. Сборник задач. — К.: Вища школа, 1987.)

Нехай $\alpha = r\pi$, $r \in \mathbb{Q}$ і $0 < r < \frac{1}{2}$. Довести:

1) $\sin \alpha \notin \mathbb{Q}$, коли $r \neq \frac{1}{6}$;

2) $\operatorname{tg} \alpha \notin \mathbb{Q}$, коли $r \neq \frac{1}{4}$.

Зауваження. За формулою зведення $\sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, завдан-

ня 1) рівносильне такому: довести, що $\cos \alpha \notin \mathbb{Q}$, коли $r \neq \frac{1}{3}$.

Задачу 3 розв'яжемо трохи згодом.

ТЕОРЕМА. Має місце рівність

$$\cos nx = P_n(\cos x), \quad (1)$$

де P_n — деякий многочлен n -го степеня з цілими коефіцієнтами та старшим коефіцієнтом 2^{n-1} . Причому, коли n непарне, то вільний член цього многочлена дорівнює 0.

Доведення

Правильність цієї рівності доведемо методом математичної індукції.

1°. Коли $n = 1$, то $P_1(\cos x) = P_1(t) = t$, де $t = \cos x$. Коли $n = 2$, мати-

memo: $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ або $P_2(t) = 2t^2 - 1$.

Отже, рівність (1) правильна при $n = 1, 2$.

2°. Нехай наведене твердження справедливе при всіх $n \leq k$, де k — фіксоване натуральне число, $k \geq 2$. Тоді

$$\begin{aligned}\cos(k+1)x &= \cos(kx+x) = \cos kx \cdot \cos x - \sin kx \cdot \sin x = \\ &= \cos kx \cdot \cos x - \frac{1}{2}(\cos(k-1)x - \cos(k+1)x),\end{aligned}$$

звідки $\cos(k+1)x = 2\cos kx \cdot \cos x - \cos(k-1)x$.

Але за припущенням індукції:

$$\cos kx = P_k(\cos x), \quad \cos(k-1)x = P_{k-1}(\cos x).$$

Тому $\cos(k+1)x = 2P_k(\cos x) \cdot \cos x - P_{k-1}(\cos x) = P_{k+1}(\cos x)$,

де

$$P_{k+1}(t) = 2tP_k(t) - P_{k-1}(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

За припущенням індукції:

$$\begin{aligned}P_k(t) &= 2^{k-1}t^k + a_{k-1}t^{k-1} + \dots + a_1t + a_0, \\ P_{k-1}(t) &= 2^{k-2}t^{k-1} + b_{k-2}t^{k-2} + \dots + b_1t + b_0,\end{aligned}$$

де a_j, b_j — деякі цілі числа.

Тоді з рівності (2) матимемо

$$\begin{aligned}P_{k+1}(t) &= 2t(2^{k-1}t^k + a_{k-1}t^{k-1} + \dots + a_1t + a_0) - \\ &\quad - (2^{k-2}t^{k-1} + b_{k-2}t^{k-2} + \dots + b_1t + b_0) = \\ &= 2^k t^{k+1} + c_k t^k + \dots + c_1 t + c_0,\end{aligned}$$

де c_j — деякі цілі числа.

Отримане подання завершує індуктивне доведення правильності рівності (1).

Доведемо тепер, що коли n непарне, то вільний член многочлена $P_n(t)$ дорівнює 0.

Нехай $n = 2k-1$. У тотожності $\cos(2k-1)x = P_{2k-1}(\cos x)$ покладемо $x = \frac{\pi}{2}$. Тоді $P_{2k-1}(0) = \cos\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi = 0$.

Отже, у многочлена $P_{2k-1}(t)$ вільний член дорівнює 0.

Безпосередньо з теореми випливає наслідок.

Наслідок. Якщо $\cos x \in \mathbb{Q}$, то $\cos nx \in \mathbb{Q}$; якщо $\cos nx \notin \mathbb{Q}$, то $\cos x \notin \mathbb{Q}$, де n — довільне натуральне число. Зокрема, $\cos \frac{\pi}{2^n} \notin \mathbb{Q}$, коли $n \geq 2$.

Справді, $\cos \frac{\pi}{2^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \notin \mathbb{Q}$, і з рівності $\cos \frac{\pi}{4} = \cos \left(2^{n-2} \cdot \frac{\pi}{2^n} \right)$ та наслідку випливає, що $\cos \frac{\pi}{2^n} \notin \mathbb{Q}$.

Розв'язання задачі 3

Скористаємося доведеною теоремою. Запишемо r у вигляді нескоротного дробу: $r = \frac{p}{q}$.

Тоді $q\alpha = qrp = p\pi$ і за теоремою $\cos q\alpha = P_q(\cos \alpha)$,

$$P_q(\cos \alpha) = \cos p\pi = (-1)^p. \quad (3)$$

Розглянемо два випадки стосовно знаменника q .

1) q — непарне число. Тоді за теоремою

$$P_q(t) = 2^{q-1}t^q + a_{q-1}t^{q-1} + \dots + a_1t, \quad t = \cos \alpha \in \mathbb{R}, \quad a_j \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq j \leq q-1,$$

і з рівності (3) випливає, що $\cos \alpha$ є коренем рівняння

$$2^{q-1}t^q + a_{q-1}t^{q-1} + \dots + a_1t \pm 1 = 0. \quad (4)$$

Нехай $\alpha = \frac{p\pi}{q}$ таке, що $\cos \alpha \in \mathbb{Q}$. Тоді $\cos \alpha = \frac{l}{n}$, де l — дільник вільного члена, що дорівнює ± 1 , n — дільник старшого коефіцієнта 2^{q-1} . Оскільки $\cos \alpha \in (0; 1)$, коли $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то звідси отримуємо

$$\cos \alpha = \frac{1}{2^m}, \quad m \geq 1.$$

Число $\cos 2\alpha = \cos \frac{2p\pi}{q}$ є також раціональним коренем рівняння (4), тому $\cos 2\alpha \in \left\{ \pm 1; \pm \frac{1}{2}; \dots; \pm \frac{1}{2^{q-1}} \right\}$ (це число вже може бути від'ємним, може дорівнювати 1). Тому $\cos 2\alpha = \pm \frac{1}{2^s}$, $0 \leq s \leq q-1$.

Оскільки $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$, то маємо рівність

$$\pm \frac{1}{2^s} = \frac{2}{2^{2m}} - 1, \quad m \geq 1, \quad 0 \leq s \leq q-1.$$

Звідси одразу встановлюємо, що в лівій частині рівності знак «плюс» неможливий. Тоді $-\frac{1}{2^s} = \frac{1}{2^{2m}} - 1$, $\frac{1}{2^{2m-1}} + \frac{1}{2^s} = 1$, звідки випливає, що $s \geq 1$, і тоді, коли $m \geq 1$, матимемо

$$\frac{1}{2^{2m-1}} \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2^s} \leq \frac{1}{2}.$$

$$\text{Звідси } \frac{1}{2^{2m-1}} + \frac{1}{2^s} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Рівність досягається, лише коли $m = s = 1$. При цьому

$$\cos \frac{p\pi}{q} = \frac{1}{2}, \quad \frac{p\pi}{q} = \frac{\pi}{3}, \quad \frac{p}{q} = r = \frac{1}{3}.$$

Отже, при $r \neq \frac{1}{3}$ у розглядуваному випадку $\cos \alpha \notin \mathbb{Q}$.

2) q — парне число. Можливі дві ситуації (нагадаємо, що $0 < \frac{p}{q} < \frac{1}{2} \Rightarrow q \geq 3$):

а) $q = 2^n$, $n \geq 2$. Тоді p — непарне число, оскільки $\frac{p}{q}$ — нескорот-

ний дріб. Маємо $\cos \frac{p\pi}{q} = \cos \left(\frac{p\pi}{2^n} \cdot 2^{n-2} \right)$, $\cos \frac{p\pi}{4} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \notin \mathbb{Q}$, і за на-

слідком із теореми $\cos \alpha = \cos \frac{p\pi}{2^n} \notin \mathbb{Q}$;

б) $q = l \cdot 2^n$, де $l \geq 3$ — непарне число, $n \geq 1$. Тоді p — непарне число. Припустимо, що $\cos \frac{p\pi}{l \cdot 2^n} \in \mathbb{Q}$. Тоді за наслідком із теореми

$\cos \frac{p\pi}{l} \notin \mathbb{Q}$. Натуральні числа p та l взаємно прості. Нехай

p' — остача від ділення p на l , тоді $1 \leq p' \leq l-1$; також числа p' , l є взаємно простими.

Оскільки $\cos \frac{p\pi}{l} = \pm \frac{p'\pi}{l}$, то $\cos \frac{p'\pi}{l} \in \mathbb{Q}$, $0 < \frac{p'}{l} < \frac{1}{2}$. Звідси за до-

веденим вище $l = 3$, $p' = 1$. Тоді $\alpha = \frac{p\pi}{3 \cdot 2^n}$, де $n \geq 1$, p — непарне та не

ділиться на 3. За наслідком з теореми маємо $\cos(2^{n-1}\alpha) = \cos \frac{p\pi}{6} \in \mathbb{Q}$,

але $\cos \frac{p\pi}{6} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \notin \mathbb{Q}$ (значення $\cos \frac{p\pi}{6}$ визначається остачею p''

від ділення p на 6, де $p'' = 1$ або $p'' = 5$). Отримана суперечність показує, що $\cos \alpha \notin \mathbb{Q}$, коли $q = l \cdot 2^n$.

Отже, ми довели, що при $r \in \mathbb{Q}$, $0 < r < \frac{1}{2}$, $r \neq \frac{1}{3}$ число $\cos(r\pi)$ є ірраціональним. Звідси випливає твердження 1) задачі 3.

Перейдемо до доведення твердження 2) про ірраціональність числа $\operatorname{tg} \alpha$. Припустимо, що при деякому $r \in \mathbb{Q}$, $0 < r < \frac{1}{2}$, $r \neq \frac{1}{4}$ число $\operatorname{tg}(r\pi) \in \mathbb{Q}$. Тоді $\sin(2r\pi) = \frac{2\operatorname{tg}(r\pi)}{1+\operatorname{tg}^2(r\pi)} \in \mathbb{Q}$.

Але кут $2r\pi$ задовольняє умови $2r \in \mathbb{Q}$, $0 < 2r < 1$, $2r \neq \frac{1}{2}$.

Якщо $2r < \frac{1}{2}$, то за твердженням 1) задачі 3 матимемо $2r = \frac{1}{6}$ і $\sin(2r\pi) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Звідси $\cos(2r\pi) = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \notin \mathbb{Q}$, але $\cos(2r\pi) = \frac{1-\operatorname{tg}^2(r\pi)}{1+\operatorname{tg}^2(r\pi)} \in \mathbb{Q}$.

Отримана суперечність доводить, що насправді $\operatorname{tg}(r\pi) \notin \mathbb{Q}$ при раціональних $r \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$, $r \neq \frac{1}{4}$. Задачу 3 розв'язано.

Зауваження. Ураховуючи періодичність функцій $\sin x$ та $\operatorname{tg} x$ матимемо, що коли r — раціональне число, то:

- а) $\sin r^\circ \in \mathbb{Q}$ лише при $r = \pm 30 + 180k$, $k \in \mathbb{Z}$ та $r = 90k$, $k \in \mathbb{Z}$;
- б) $\operatorname{tg} r^\circ \in \mathbb{Q}$ лише при $r = 45 + 90k$, $k \in \mathbb{Z}$ та $r = 180k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Зокрема, синус та тангенс кута $21^\circ 19' 43''$ є числом ірраціональним.

На закінчення сформулюємо запитання, відповідь на яке авторам невідома: за яких умов число $\sin \alpha^\circ + \sin \beta^\circ$ є ірраціональним, де $\alpha \in \mathbb{N}$ і $\alpha < 90$, $\beta \in \mathbb{N}$ і $\beta < 90$?

§ 4. Про деякі нерівності ітераційного виду

Нехай $\{a_n, n \geq 1\}$ і $\{b_n, n \geq 1\}$ дві послідовності, причому $a_n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 2$, $b_n > 0$.

Розглянемо нерівності виду

$$\sqrt[a_1]{b_1} \sqrt[a_2]{b_2} \sqrt[a_3]{b_3} \dots \sqrt[a_n]{b_n} < c \text{ та } \sqrt{b_1 + \sqrt{b_2 + \sqrt{b_3 + \dots + \sqrt{b_n}}}} < c,$$

де c — деяка додатна стала.

4.1. МЕТОД ЗГОРТАННЯ

Почнемо з нерівності $x_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}} < 2$ (n радикалів, $n \geq 1$). Очевидно, $x_n < \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2 + 2}}}}_{n \text{ радикалів}} = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2 + 2}}}}_{n-1 \text{ радикалів}}.$

Вираз $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2 + 2}}}$ (n радикалів) згортається, і через скінченну кількість кроків дорівнюватиме $\sqrt{2 + 2} = 2$, тому $x_n < 2$.

Доведемо, що в нерівності $x_n < 2$ стала 2 точна, тобто немає такого $c < 2$, що при будь-якому n виконується нерівність $x_n < c$. Для цього доведемо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$.

Послідовність додатних чисел $\{x_n, n \geq 1\}$ зростає і обмежена зверху, отже, збігається до деякого додатного числа a . Переходячи до границі в рекурентній рівності $x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}$ або $x_n^2 = 2 + x_{n-1}$, маємо $a^2 - a - 2 = 0$, звідки $a = 2$ (адже $a > 0$). Це і доводить, що в нерівності $x_n < 2$ стала 2 є точною.

Аналогічно доводяться нерівності:

$$\sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6}}} < 3;$$

$$\sqrt{12 + \sqrt{12 + \dots + \sqrt{12}}} < 4;$$

$$\sqrt{k^2 + k + \sqrt{k^2 + k + \dots + \sqrt{k^2 + k}}} < k + 1 \quad (k \geq 1);$$

$$\sqrt{2\sqrt{2} \dots \sqrt{2}} < 2;$$

$$\sqrt{3\sqrt{3}\cdots\sqrt{3}} < 3;$$

$$\sqrt{k\sqrt{k}\cdots\sqrt{k}} < k \quad (k \geq 2).$$

В усіх цих нерівностях n радикалів, $n \geq 1$, і в правих частинах стоять точні сталі.

4.2. МЕТОД ГРАНИЦЬ

Нехай $x_n = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots + \sqrt{1}}}$ (n радикалів, $n \geq 1$). Послідовність $\{x_n, n \geq 1\}$ зростаюча і обмежена зверху, бо $x_n < \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}} < 2$. Отже, ця послідовність збігається до деякого додатного числа a . Справедлива рекурентна рівність $x_n = \sqrt{1 + x_{n-1}}$, або $x_n^2 = 1 + x_{n-1}$. Переходячи в цій рівності до границі, отримуємо

$$a^2 - a - 1 = 0, \quad a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Отже, $x_n < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, причому $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ — точна стала.

Аналогічно доводиться нерівність

$$\sqrt{k + \sqrt{k + \dots + \sqrt{k}}} < \frac{1 + \sqrt{1 + 4k}}{2} \quad (k \geq 1),$$

причому стала $\frac{1 + \sqrt{1 + 4k}}{2}$ — точна.

Вправа 1. Довести нерівність $\sqrt{3 + 2\sqrt{3 + 2\sqrt{3 + \dots + 2\sqrt{3}}}} < 3$ і показати, що стала 3 є точною.

Вправа 2. Довести нерівність $\sqrt{4 + 2\sqrt{4 + 2\sqrt{4 + \dots + 2\sqrt{4}}}} < 1 + \sqrt{5}$ і показати, що стала $1 + \sqrt{5}$ є точною.

4.3. МЕТОД МАЖОРУВАННЯ

Нехай $x_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{1 + \dots + \sqrt{(-1)^n \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{2}}}}}$ (n радикалів, $n \geq 1$).

Замінивши всюди 1 на 2, ми збільшуємо x_n .

Отже, $x_n < \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}} < 2$.

Тут число 2 вже не є точною сталою. Послідовність $\{x_n\}$ зростаюча і обмежена зверху, отже, збігається до деякої границі a . Зрозуміло, що $a \leq 2$. Коли n парне і $n \geq 4$, маємо $x_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + x_{n-2}}}$.

Підпослідовність $\{x_{2k}, k \geq 1\}$ також збігається до a . Тоді за неперервністю складеної функції $f(t) = \sqrt{1 + \sqrt{2 + t}}$, $t \geq -2$, маємо $a = \sqrt{1 + \sqrt{2 + a}}$, звідки $a^4 - 2a^2 - a - 1 = 0$.

Безпосередньо перевіряємо, що число 2 не є коренем останнього рівняння, тому $a < 2$. Крім того, враховуючи, що

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots + \sqrt{1}}} \leq \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{1 + \dots + \sqrt{(-1)^n \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{2}}}}} = x_n,$$

маємо $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \leq a < 2$.

Більш точну оцінку для a можна одержати, досліджуючи рівняння $a^4 - 2a^2 - a - 1 = 0$. Зрозуміло, що a є числом ірраціональним.

Аналогічно, коли $0 < a < b$, можна розглянути більш загальну послідовність $y_n = \sqrt{a + \sqrt{b + \sqrt{a + \dots + \sqrt{u_n}}}}$ (n радикалів, $n \geq 1$), де $u_n = a$, коли n — непарне, та $u_n = b$, коли n — парне.

$$y_n < \underbrace{\sqrt{b + \sqrt{b + \dots + \sqrt{b}}}}_{n \text{ радикалів}} < \frac{1 + \sqrt{1 + 4b}}{2}.$$

Стала $\frac{1 + \sqrt{1 + 4b}}{2}$ не є точною при оцінюванні y_n .

Покажемо, що точна стала c лежить на проміжку $\left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}; \frac{1 + \sqrt{1 + 4b}}{2}\right)$. Точною сталою буде число $t_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, $t_0 > 0$.

Справді, як і в попередньому прикладі, $\{y_n\}$ збігається до числа $t_0 > 0$, яке є коренем рівняння $t = \sqrt{a + \sqrt{b + t}}$.

Крім того, $t_0 \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 4b}}{2}$, а з нерівності $y_n \geq \underbrace{\sqrt{a + \sqrt{a + \dots + \sqrt{a}}}}_{n \text{ радикалів}}$

впливає також, що $t_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \geq \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$.

Отже, $\frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2} \leq t_0 \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 4b}}{2}$.

Припустимо, що $t_0 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$.

Тоді $t_0 = \sqrt{a + \sqrt{b + t_0}} > \sqrt{a + \sqrt{a + t_0}} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$.

Отримали суперечність.

Коли $t_0 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4b}}{2}$, то $t_0 = \sqrt{a + \sqrt{b + t_0}} < \sqrt{b + \sqrt{b + t_0}} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4b}}{2}$.

І знову отримали суперечність.

Остаточно маємо $t_0 \in \left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}; \frac{1 + \sqrt{1 + 4b}}{2} \right)$, що і доводить твердження про точну сталу.

4.4. ЗАГАЛЬНІ НЕРІВНОСТІ ТА ПРИКЛАДИ

ТЕОРЕМА 1. Нехай $\{a_n, n \geq 1\}$ і $\{b_n, n \geq 1\}$ дві послідовності, причому $a_n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 2$, $b_n \geq 1$, і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$ збігається до числа C . Тоді

$$x_n = \sqrt[n]{b_1} \sqrt[n]{b_2} \sqrt[n]{b_3} \dots \sqrt[n]{b_n} < \left(\frac{C}{S} \right)^S, \quad n \geq 1, \quad (1)$$

де $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$.

Доведення

Покладемо $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k}$, $C_n = \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k}$ і помітимо, що

$$\frac{1}{S_n} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k} = 1.$$

За нерівністю Коші з ваговими множниками [1], маємо:

$$\begin{aligned} x_n &= \sqrt[n]{b_1} \sqrt[n]{b_2} \sqrt[n]{b_3} \dots \sqrt[n]{b_n} = \\ &= \left(\frac{1}{b_1^{a_1 S_n}} \right)^{S_n} \cdot \left(\frac{1}{b_2^{a_1 a_2 S_n}} \right)^{S_n} \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{b_n^{a_1 a_2 \dots a_n S_n}} \right)^{S_n} \leq \\ &\leq \left(\frac{b_1}{a_1 S_n} + \frac{b_2}{a_1 a_2 S_n} + \dots + \frac{b_n}{a_1 a_2 \dots a_n S_n} \right)^{S_n} = \frac{1}{S_n^{S_n}} \cdot C_n^{S_n}. \end{aligned}$$

Оскільки $0 < C_n < C$ і $\frac{1}{a_1} < S_n < S$, то величина $\left(\frac{C_n}{S_n}\right)^{S_n}$ обмежена зверху, послідовність $\{x_n, n \geq 1\}$ також обмежена зверху. Крім того, оскільки $b_n \geq 1$, $n \geq 1$, послідовність $\{x_n, n \geq 1\}$ неспадна і, отже, збіжна.

Зрозуміло, що $x_n < \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{C_n}{S_n}\right)^{S_n} = \left(\frac{C}{S}\right)^S$, що і треба було до-

вести.

Розглянемо деякі окремі випадки.

1) $a_n = k$, $n \geq 1$, де $k \geq 2$ — фіксоване натуральне число;

$$b_n = n + 1, \quad n \geq 1.$$

Тоді

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} = \frac{\frac{1}{k}}{1 - \frac{1}{k}} = \frac{1}{k-1}, \quad C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{k^n} = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{m}{k^{m-1}}.$$

Нехай

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} x^m = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1.$$

Тоді

$$f'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} m x^{m-1} = \frac{1}{(1-x)^2},$$

$$f'\left(\frac{1}{k}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{k^{m-1}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{k}\right)^2} = \frac{k^2}{(k-1)^2}.$$

$$\text{Отже, } C = \frac{k^2}{(k-1)^2} - 1 = \frac{2k-1}{(k-1)^2}.$$

Тому $\frac{C}{S} = \frac{2k-1}{k-1}$ і за теоремою 1:

$$\sqrt[k]{2\sqrt[k]{3\sqrt[k]{4\cdots\sqrt[k]{n}}}} < \sqrt[k-1]{\frac{2k-1}{k-1}}, \quad n \geq 2, \quad k \geq 2, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Звідси, коли $k = 2$, матимемо нерівність

$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\cdots\sqrt{n}}}} < 3.$$

Зауважимо, що у [4] наведено три доведення цієї нерівності, відмінні від запропонованого.

2) $a_n = n+1$, $n \geq 1$; $b_n = a_n$, $n \geq 1$.

Тоді

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} = e - 2,$$

$$C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e - 1.$$

З теореми 1 випливає, що

$$\sqrt{2\sqrt[3]{3\sqrt[4]{4\cdots\sqrt[n]{n}}}} < \left(\frac{e-1}{e-2}\right)^{e-2} = \left(1 + \frac{1}{e-2}\right)^{e-2}, \quad n \geq 2.$$

Розглянемо функцію $f(x) = (1+a)^x$, $a > 0$. Оскільки

$$f''(x) = (1+a)^x \ln^2(1+a) > 0,$$

то функція опукла донизу на всій дійсній осі. Виберемо на графіку функції точки $A(0;1)$ та $B(1;1+a)$. Пряма AB має рівняння $y = 1 + ax$. Отже, коли $0 < x < 1$, виконується нерівність

$$(1+a)^x < 1 + ax.$$

Покладемо в цій нерівності $a = \frac{1}{e-2}$, $x = e-2$ і отримаємо

$$\left(1 + \frac{1}{e-2}\right)^{e-2} < 1 + 1 = 2.$$

Так встановлено нерівність $\sqrt{2\sqrt[3]{3\sqrt[4]{4\cdots\sqrt[n]{n}}}} < 2$.

ТЕОРЕМА 2. Нехай $\{a_n, n \geq 1\}$ — послідовність невід'ємних чисел.

Послідовність $x_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{a_3 + \cdots + \sqrt{a_n}}}}$, $n \geq 1$, збіжна тоді і тільки тоді, коли послідовність $y_n = \sqrt[n]{a_n}$, $n \geq 1$, обмежена.

(Цю теорему наведено в [2], задача II.2.28; див. також [3], с. 51, задачі 162 та 163.)

Доведення

$$x_n \geq \sqrt{0 + \sqrt{0 + \sqrt{0 + \cdots + \sqrt{a_n}}}} = \sqrt[n]{a_n} = y_n.$$

Якщо послідовність $\{x_n, n \geq 1\}$ збіжна, то послідовність $\{y_n, n \geq 1\}$ обмежена. З іншого боку, нехай послідовність $\{y_n, n \geq 1\}$

обмежена. Тоді існує число $c > 0$ таке, що $y_n < c$, коли $n \in \mathbb{N}$, тобто $\sqrt[n]{a_n} < c$, $a_n < c^{2^n}$, $n \geq 1$.

Тоді

$$x_n < \sqrt{c^2 + \sqrt{c^4 + \sqrt{c^8 + \dots + \sqrt{c^{2^n}}}}} = c \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots + \sqrt{1}}}} < c \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Послідовність $\{x_n, n \geq 1\}$ зростає і обмежена, отже, збіжна.

Із доведення теореми 2 випливає наслідок.

Наслідок. Якщо $\{a_n, n \geq 1\}$ — послідовність невід'ємних чисел і для деякого додатного c виконується нерівність $a_n < c^{2^n}$, $n \geq 1$, то

$$\sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{a_3 + \dots + \sqrt{a_n}}}} < c \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \quad (3)$$

Розглянемо деякі окремі випадки.

1) $a_n = n$, $n \geq 1$. Доведемо за допомогою методу математичної індукції, що $n < (1,2)^{2^n}$.

1°. $n = 1$, тоді $1 < 1,2^2$, що справедливо; $n = 2$, тоді $2 < 1,2^4 = 1,44^2$, що також справедливо.

2°. Нехай при фіксованому $k \geq 2$ виконується

$$k < (1,2)^{2^k}. \quad (4)$$

Доведемо допоміжну нерівність

$$\frac{k+1}{k} < (1,2)^{2^k}. \quad (5)$$

Справді, $\frac{k+1}{k} = 1 + \frac{1}{k} \leq 2 \leq k < (1,2)^{2^k}$ згідно з (4).

Перемноживши почленно нерівності (4) і (5), матимемо $k+1 < (1,2)^{2^{k+1}}$, що завершує індуктивне доведення.

Тепер згідно з (3) маємо

$$\sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \dots + \sqrt{n}}}} < 1,2 \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2} < 2.$$

2) Нехай $a_n = 2^{n-1}$, $n \geq 1$. Доведіть самостійно нерівність $2^{n-1} < (\sqrt{2})^{2^n}$, $n \geq 1$.

Згідно з (3) маємо $\sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{4 + \dots + \sqrt{2^n}}}} < \sqrt{2} \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

3) $a_n = n!$, $n \geq 1$. Доведіть, що $n! < (\sqrt{2})^{2^n}$.

Тепер згідно з (3) маємо $\sqrt{1! + \sqrt{2! + \sqrt{3! + \dots + \sqrt{n!}}} < \frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{2}}$.

4) Нехай $a_n = 4^{n-1}$, $n \geq 1$. Доведемо, що $4^{n-1} \leq (\sqrt{2})^{2^n}$. Справді, ця нерівність рівносильна такій: $2^{2n-2} \leq 2^{n-1} \Leftrightarrow 2n-2 \leq 2^{n-1}$, що справедливо (коли $n \geq 4$, нерівність строга).

Тепер згідно з (3) маємо $\sqrt{1 + \sqrt{4 + \sqrt{4^2 + \dots + \sqrt{4^n}}} < \frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{2}}$.

Одержана стала $\frac{1 + \sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ неточна.

Доведемо, що $\sqrt{1 + \sqrt{4 + \sqrt{4^2 + \dots + \sqrt{4^n}}} < 2$, причому 2 — точна стала.

Нехай $x_n = \sqrt{1 + \sqrt{4 + \sqrt{4^2 + \dots + \sqrt{4^n}}}$.

Покладемо $a_k = \sqrt{4^k + \sqrt{4^{k+1} + \dots + \sqrt{4^n}}}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Помітимо, що $a_{n-1} = \sqrt{4^{n-2} + \sqrt{4^n}} = \sqrt{(2^{n-1})^2 + 2 \cdot 2^{n-1}} < 2^{n-1} + 1$.

Доведемо, що коли $a_k < 2^k + 1$, то $a_{k-1} < 2^{k-1} + 1$.

Справді,

$$a_{k-1} = \sqrt{4^{k-1} + a_k} < \sqrt{4^{k-1} + 2^k + 1} = \sqrt{(2^{k-1})^2 + 2 \cdot 2^{k-1} + 1} = 2^{k-1} + 1.$$

Оскільки $a_{n-1} < 2^{n-1} + 1$, то $a_{n-2} < 2^{n-2} + 1$, $a_{n-3} < 2^{n-3} + 1$, ..., $a_1 < 2^1 + 1 = 3$ та $x_n = \sqrt{1 + a_1} = \sqrt{1 + 3} = 2$ (тут відбулося згортання виразу $\sqrt{1 + \sqrt{4 + \sqrt{4^2 + \dots + \sqrt{4^n}}}}$).

Доведемо, що 2 — точна стала. Для цього покажемо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$. Послідовність $\{x_n, n \geq 1\}$ зростаюча і обмежена, отже, збіжна. Нехай $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Зрозуміло, що $0 < a \leq 2$. Коли $\lambda > 0$,

$$(1 + \lambda)x_n \geq \sqrt{1 + \sqrt{4 + \sqrt{4^2 + \dots + \sqrt{4^n(1 + \lambda)^{2^{n+1}}}}}}$$

Існує таке число $n_0 = n_0(\lambda)$, що при всіх $n \geq n_0(\lambda)$ виконується нерівність $2^n(1 + \lambda)^{2^n} \geq 2^n + 1 \Leftrightarrow \sqrt{4^n(1 + \lambda)^{2^{n+1}}} \geq \sqrt{4^n} + 1$.

Враховуючи процес згортання, маємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \lambda) x_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \sqrt{4 + \sqrt{4^2 + \dots + \sqrt{4^{n-1} + \sqrt{4^n + 1}}}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 = 2.$$

Отже, $(1 + \lambda)a \geq 2$ при всіх $\lambda > 0$. Коли $\lambda \rightarrow 0$, дістанемо $a \geq 2$. Раніше ми бачили, що $0 < a \leq 2$, отже, $a = 2$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Коваленко В. Г., Гельфанд М. Б., Ушаков Р. П. Доведення нерівностей. — К. : Вища школа, 1979.
2. Дороговцев А. Я. Математический анализ. Сборник задач. — К. : Вища школа, 1987.
3. Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. Ч. 1. — М. : Наука, 1978.
4. Решения задач, помещенных в № 3 за 1987 г. // Математика в школе. — 1988. — № 2. — С. 60, 64.

§ 5. Як знайти головний період функції

5.1. ПЕРІОДИЧНІ ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

Означення 1. Функція $f(x)$ називається періодичною з періодом $T \neq 0$, якщо для кожного x із області визначення функції числа $x - T$ і $x + T$ також належать цій області та виконується рівність

$$f(x) = f(x + T). \quad (1)$$

З означення 1 випливає рівність $f(x) = f(x - T)$. Справді, оскільки для довільної точки x з області визначення $D(f)$ періодичної функції $f(x)$ з періодом T число $x - T$ також належить $D(f)$, то, підставивши в (1) замість x число $x - T$, матимемо:

$$f(x - T) = f(x - T + T) = f(x).$$

З означення 1 випливає також, що область визначення періодичної функції не обмежена ні зверху, ні знизу, бо разом із кожним числом x вона містить також і числа $x + nT$, $x - nT$, де $n \in \mathbb{N}$.

Приклад 1. Чи є періодичною функція

$$y = \cos x - \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x} \right)^{-1} + \sqrt{x} + \sqrt{x+1}?$$

Розв'язання

Маємо $D(y) = [0; +\infty)$. Ця множина обмежена знизу, і тому функція неперіодична, хоча при $x \geq 0$ $y(x) = \cos x$. Тут істотно, що задана функція визначена лише при $x \geq 0$, тоді як функція косинуса визначена при всіх $x \in \mathbb{R}$.

Вправа 1. Довести неперіодичність функцій:

- 1) $y = \sin \sqrt{x}$;
- 2) $y = \cos \sqrt{1-x}$;
- 3) $y = \arcsin(x+2)$.

Вправа 2. Сформулювати означення неперіодичної функції.

Область визначення періодичної функції має бути, так би мовити, періодичною. Тобто має виконуватися умова, що для кожного x із області визначення функції числа $x - T$ і $x + T$ також належать області визначення.

Приклад 2. Чи є періодичною функція $y = \frac{1}{x-1}$?

Розв'язання

Тут $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$. Нехай T — період заданої функції.

Тоді $T \neq 0$, звідки $(1+T) \in D(y)$, тому і число $(1+T) - T = 1$ повинно належати $D(y)$. Ми прийшли до протиріччя. Отже, періодів задана функція не має.

Вправа 3. Довести неперіодичність функцій:

$$1) y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2};$$

$$2) y = \sqrt{x^3 - 1}.$$

Приклад 3. Чи є періодичною функція $y = 2^{|x|}$?

Розв'язання

Задана функція зростає на проміжку $[0; +\infty)$. Якщо вона має період $T > 0$, то $y(1) = y(1+T)$. Але $y(1) > y(1+T)$, бо $y(x)$ зростає, коли $x \geq 0$. Отже, задана функція не має додатних періодів і тому неперіодична.

Зрозуміло, що строго монотонна на деякому промені функція не є періодичною.

Вправа 4. Довести неперіодичність функцій:

$$1) y = x^2;$$

$$2) y = \frac{x-1}{x+2}.$$

Приклад 4. Чи є періодичною функція $y = \operatorname{tg}(x^2)$?

Розв'язання

Область визначення функції $D(y)$ задається нерівністю

$$x \neq \pm \sqrt{\frac{\pi}{2} + \pi k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Нехай $x_n = \pm \sqrt{\frac{\pi}{2} + \pi n}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Помітимо, що

$$x_{n-1} - x_n = \sqrt{\pi} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} + n + 1} + \sqrt{\frac{1}{2} + n}}.$$

Із зростанням номера n відстань між сусідніми членами послідовності $\{x_n\}$ зменшується.

Отже, множина $D(y)$ не є періодичною, тому і задана функція неперіодична.

Вправа 5. Довести неперіодичність функцій:

1) $y = \operatorname{ctg}(x^2)$;

2) $y = \frac{1}{\sin(x^3)}$.

ТЕОРЕМА 1. Нехай функція $f(x)$ неперервна на $\mathbb{R}$ та періодична. Тоді ця функція обмежена, тобто існує таке число $c \geq 0$, що для кожного дійсного x виконується нерівність $|f(x)| \leq c$.

Доведення

Нехай $T > 0$ період функції $f(x)$. На відрізку $[0; T]$ функція $f(x)$ неперервна, тому за теоремою Вейєрштраса вона обмежена на цьому відрізку. Це означає, що існує таке число $c \geq 0$, що при всіх $x \in [0; T]$ маємо $|f(x)| \leq c$. Нехай тепер t — довільне дійсне число. Його можна подати у вигляді $t = nT + \tau$, де $n \in \mathbb{Z}$, $\tau \in [0; T]$. За доведеним, $|f(\tau)| \leq c$. Оскільки функція періодична, то

$$|f(t)| = |f(nT + \tau)| = |f(\tau)| \leq c.$$

Отже, $f(x)$ обмежена на $\mathbb{R}$.

Наслідок. Нехай $P(x)$ многочлен ненульового степеня. Тоді $y = P(x)$ — неперіодична функція.

Доведення

Припустимо супротивне. Нехай $y = P(x)$ — періодична функція. Оскільки кожний многочлен є неперервною функцією, то за теоремою 1 функція $y = P(x)$ обмежена. Подамо $P(x)$ у канонічному вигляді:

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n,$$

де $n \geq 1$, $a_0, a_1, \dots, a_n$ — числові коефіцієнти, $a_0 \neq 0$.

$$\text{Розглянемо границю } \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n} \right).$$

Вираз у дужках прямує до числа $a_0 \neq 0$, множник x_n прямує до нескінченності. Тому, $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \infty$ і $y = P(x)$ є необмеженою функцією. Отримали суперечність. Отже, припущення є хибним, і насправді функція $y = P(x)$ неперіодична.

Приклад 5. Довести неперіодичність функції $y = x + \cos x$.

Доведення

Задана функція неперервна на $\mathbb{R}$ як сума двох неперервних функцій. Вона необмежена, бо $y\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, і ці значення необмежено зростають, якщо $n = 1, 2, 3, \dots$ За теоремою 1 ця функція періодична.

Вправа 6. Довести неперіодичність функцій:

- 1) $y = x^2 + \sin x$;
- 2) $y = |x| - \cos(2x)$.

Приклад 6. Відомо, що функція $f(x)$ визначена на $\mathbb{R}$ і при всіх $x \in \mathbb{R}$ справджується рівність $f(x+1) = \frac{1-f(x)}{1+f(x)}$. Чи періодична ця функція?

Розв'язання

Підставляючи в задану рівність $x+1$ замість x , матимемо

$$f((x+1)+1) = \frac{1-f(x+1)}{1+f(x+1)} = \left(1 - \frac{1-f(x)}{1+f(x)}\right) : \left(1 + \frac{1-f(x)}{1+f(x)}\right) = f(x).$$

Функція періодична з періодом 2.

Приклад 7. Нехай $f(x)$ — періодична функція, a — дійсне число, відмінне від нуля. Довести, що функція $f_1(x) = f(ax)$ також є періодичною.

Доведення

Нехай T — період $f(x)$. Перевіримо, чи число $T_1 = \frac{T}{a}$ є періодом f_1 . Справді, $f_1(x+T_1) = f\left(a\left(x + \frac{T}{a}\right)\right) = f(ax+T) = f(ax) = f_1(x)$.

ТЕОРЕМА 2. Якщо функція $f(x)$ періодична і диференційовна на $D(f)$, то її похідна $f'(x)$ також є періодичною функцією.

Доведення

Для всіх $x \in D(f)$ справджується рівність $f(x) = f(x+T)$. У правій частині рівності стоїть складена функція: внутрішня функція є лінійною, а зовнішня — це $f(x)$. Тоді

$$f'(x) = (f(x+T))' = f'(x+T) \cdot (x+T)' = f'(x+T),$$

або $f'(x) = f'(x+T)$.

Приклад 8. Довести неперіодичність функції $f(x) = \sin(x^2)$.

Доведення

Припустимо, що $f(x)$ періодична. Тоді за теоремою 2 функція $f'(x) = 2x \cos(x^2)$ також періодична. Але вона неперервна і за теоремою 1 є обмеженою. Проте $f'(\sqrt{2\pi n}) = 2\sqrt{2\pi n}$, коли $n \in \mathbb{N}$. Ці значення необмежено зростають при зростанні n . Тому $f'(x)$ необмежена. Отримане протиріччя доводить неперіодичність $f(x)$.

Вправа 7. Довести неперіодичність функцій:

- 1) $y = \cos(x^3)$;
- 2) $y = \sin(2^x)$.

Виникає запитання: чи буде періодичною первісна періодичної функції? Виявляється, що не завжди. Нехай $f(x) = 2 + \cos x$ — періодична функція. Її первісна $F(x) = 2x + \sin x + c$, $c \in \mathbb{R}$, є неперіодичною. Покажемо, що первісну періодичної функції завжди можна «підправити» лінійною функцією так, щоб після цього вона стала також періодичною.

ТЕОРЕМА 3. Нехай періодична функція $f(x)$ задана на $\mathbb{R}$ і має первісну $F(x)$. Тоді для деякого числа c функція $G(x) = F(x) - cx$ також періодична.

Доведення

Розглянемо функцію $H(x) = F(x+T) - F(x)$, де T — період $f(x)$. Тоді $H'(x) = F'(x+T) - F'(x) = f(x+T) - f(x) = 0$.

Тому $H(x)$ є сталою величиною: $H(x) = d$, $x \in \mathbb{R}$, або

$$F(x+T) = F(x) + d.$$

Для функції $G(x) = F(x) - \frac{dx}{T}$ матимемо

$$G(x+T) = F(x+T) - \frac{d(x+T)}{T} = F(x) + d - \frac{dx}{T} - d = G(x).$$

Отже, число $c = \frac{d}{T}$ є шуканим.

Вправа 8. Довести періодичність функцій:

- 1) $y = A \sin(kx + b)$, де A , k , b — довільні дійсні параметри;
- 2) $y = |\cos x|$;
- 3) $y = \{x\}$ (дробова частина x).

Вправа 9. Функція $f(x)$ визначена на $\mathbb{R}$ і при всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується $f(x+1) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$. Довести, що $f(x)$ є періодичною з періодом $T = 4$.

Вправа 10. Періодична функція $f(x)$ визначена на $\mathbb{R}$. Довести, що її можна записати у вигляді суми $f = f_1 + f_2$, де обидві ці функції також періодичні, причому f_1 — парна, f_2 — непарна.

Указівка. $f_1(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$.

Вправа 11. Функція $f(x)$ періодична. Перевірити, що періодичними є також функції: $y = kf(ax+b)+c$, $y = |f(x)|$. Дати геометричне тлумачення.

5.2. ГОЛОВНИЙ ПЕРІОД ФУНКЦІЇ

Означення 2. Нехай $f(x)$ — періодична функція. Найменший додатний період цієї функції називають її головним періодом.

Зауважимо, що не кожна періодична функція має головний період. Так, для сталої функції $y = c$, де $c \in \mathbb{R}$, будь-яке додатне число є періодом. Оскільки найменшого додатного числа не існує, то не існує і головного періоду такої функції.

Іншим цікавим прикладом періодичної функції без головного періоду є так звана функція Діріхле [2, с. 62].

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{якщо } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Приклад 9. Знайти головний період функції $y = \cos x$.

Розв'язання

Нехай $T > 0$ — період цієї функції. Тоді $y(0) = y(T)$, або $1 = \cos T$, звідки $T = 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$. Найменше число такого виду $T_1 = 2\pi$. Відомо, що функція $y = \cos x$ періодична з періодом 2π . Отже, число 2π є шуканим головним періодом.

Вправа 12. Знайти головний період функції:

- 1) $y = \operatorname{tg} x$;
- 2) $y = \sin x$;
- 3) $y = |\sin x|$.

Розглянемо питання про існування головного періоду. У випадку $D(f) = \mathbb{R}$ його висвітлено в [2].

ТЕОРЕМА 4. Нехай неперервна періодична функція $f(x)$ задана на множині $A \subset \mathbb{R}$ і не є сталою. Тоді вона має головний період.

Доведення

Припустимо, що $f(x)$ не має головного періоду. Уведемо множину V усіх додатних періодів $f(x)$. Ця множина не порожня, бо $f(x)$ періодична. Розглянемо два випадки:

- 1) множина V обмежена знизу деяким $\alpha > 0$, тобто при кожному $T \in V$ виконується нерівність $T \geq \alpha$. Серед таких чисел α можна вибрати найбільше число a , тобто при $T \in V$ завжди $T \geq \alpha$, проте для кожного $a_1 > a$ знайдеться такий період $T_1 \in V$, що $T_1 < a_1$. (Насправді тут використано поняття точної нижньої межі множини.) Ми припустили, що найменшого додатного періоду не існує, отже, $a \notin V$. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$, тоді знайдеться $T_1 \in V$ таке, що $a < T_1 < a_1 = a + \varepsilon$. Далі, знайдеться таке $T_2 \in V$, що $a < T_2 < a_2 = T_1$. Різниця двох періодів знову є періодом, тому $T_1 - T_2 \in V$. Але обидва числа T_2 та T_1 потрапляють в інтервал $(a; a + \varepsilon)$, звідки $0 < T_1 - T_2 < \varepsilon$. Ми показали, що існує додатний період, як завгодно близький до нуля. Але це можливо, коли множина V обмежена знизу додатним числом.
- 2) множина V містить, як завгодно малі додатні числа. Покажемо, що $f(x)$ є сталою на множині A . Нехай $x_1 < x_2$ — дві точки з $D(f)$.

Перевіримо, що $f(x_1) = f(x_2)$. Справді, для числа виду $\frac{1}{n}$ існує

$T_n \in V$ таке, що $0 < T_n < \frac{1}{n}$. Тоді для всіх цілих m виконується

$f(x_1) = f(x_1 + mT_n)$. Числами виду $x_1 + mT_n$, $m \in \mathbb{Z}$, можна наблизити будь-яке число з точністю $\frac{1}{n}$. Нехай t_n — таке з чисел цього виду,

що $|t_n - x_2| < \frac{1}{n}$. Послідовність $\{t_n\}$ збігається до x_2 , причому

$f(x_1) = f(t_n)$, $n \geq 1$. За неперервністю $f(x)$ у точці x_2 , маємо

$f(x_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) = f(x_2)$. Отже, у будь-яких двох точках своєї області

визначення $f(x)$ набуває однакових значень. Тоді вона є сталою, що суперечить умові. Тому припущення про відсутність головного періоду хибне.

ТЕОРЕМА 5. Якщо функція $f(x)$ періодична і має головний період, то всі її періоди є кратними головному періоду.

Доведення

Якщо T_1 і T_2 — періоди функції $f(x)$, то відмінні від нуля числа виду $kT_1 + mT_2$, де $k \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$, також є періодами цієї функції. Справді, $f(x + kT_1 + mT_2) = f(x + kT_1) = f(x)$, $x \in D(f)$.

Нехай тепер T — головний період $f(x)$, а T_1 — інший період цієї функції. Для деякого натурального n маємо $nT \leq T_1 < (n+1)T$, або $0 < T_1 - nT < T$. Число $T_1 - nT$ також є періодом $f(x)$, якщо воно відмінне від нуля. Але, коли $T_1 - nT \neq 0$, то $0 < T_1 - nT < T$ і T не є головним періодом $f(x)$. Отже, $T_1 - nT = 0$ і $T_1 = nT$, що і треба було довести.

ТЕОРЕМА 6. Нехай періодична функція $f(x)$ диференційовна на $\mathbb{R}$ та відмінна від сталої. Тоді головний період $f(x)$ дорівнює головному періоду функції $f'(x)$.

Доведення

Зауважимо, що головний період $f(x)$ існує за теоремою 4. Якщо T — період $f(x)$, то як доведено в теоремі 2, число T також період функції $f'(x)$. Навпаки, нехай тепер T — період функції $f'(x)$.

Тоді для функції $q(x) = f(x+T) - f(x)$ матимемо

$$q'(x) = f'(x+T) - f'(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Отже, $q(x)$ — стала: $q(x) = c \in \mathbb{R}$. Якщо $c \neq 0$, то матимемо послідовно

$$f(x+T) = f(x) + c, \quad f(x+2T) = f(x+T) + c = f(x) + 2c, \dots,$$

$$f(x+nT) = f(x) + nc, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Зокрема, $f(nT) = f(0) + nc$, і послідовність значень $\{f(nT), n \geq 1\}$ — необмежена. Отже, $f(x)$ необмежена. Але з диференційовності $f(x)$ випливає її неперервність, і за теоремою 1, неперервна періодична функція $f(x)$ мусить бути обмеженою.

Тому насправді $c = 0$, і $f(x+T) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Число T повинно бути періодом $f(x)$. Як бачимо, у функцій $f(x)$ та $f'(x)$ рівні періоди, тому в них і головні періоди рівні.

Зауваження 1. Для диференційовних періодичних функцій $f(x)$, визначених не на всій дійсній прямій, головні періоди $f(x)$ та $f'(x)$ можуть не збігатися. Наведемо приклад:

$$f(x) = \{x\}^2 + (-1)^{|x|}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.$$

(Тут і надалі $[x]$ та $\{x\}$ — відповідно ціла і дробова частини x .)

Головний період $f(x)$ дорівнює 2, а для похідної $f'(x) = 2\{x\}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, головний період дорівнює 1.

ТЕОРЕМА 7. Якщо функція $f(x)$ періодична з головним періодом T , то кожна з функцій, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$, $y = kf(x)$, де $k \neq 0$, $y = a + f(x)$, $y = f(x + a)$ також періодична з головним періодом T .

Доведення проведіть самостійно. Треба лише перевірити, чи всі ці функції мають ті самі періоди, що і функція $f(x)$.

ТЕОРЕМА 8. Якщо функція $f(x)$ періодична з головним періодом T , то функція $y = f(ax)$, де $a \neq 0$, періодична з головним періодом $T_1 = \frac{T}{|a|}$.

Доведення

За теоремою 7, функція $q(x) = f(ax)$ має такий самий головний період, як і функція $q(-x) = f(-ax)$. Тому достатньо обмежитися випадком $a > 0$. Нехай T — період $f(x)$. Тоді

$$f\left(a\left(x + \frac{T}{a}\right)\right) = f(ax + T) = f(ax).$$

Отже, $\frac{T}{a}$ є періодом функції $y = f(ax)$.

Нехай $\frac{T}{a}$ — період функції $y = f(ax)$. Тоді

$$f(ax) = f\left(a\left(x + \frac{T}{a}\right)\right) = f(ax + T).$$

Покладаючи $ax = y$, матимемо $f(y) = f(y + T)$, і число T є періодом функції $f(x)$. Отже, якщо T — головний період $f(x)$, то $T_1 = \frac{T}{a}$ є головним періодом функції $y = f(ax)$.

Із теорем 7 і 8 випливає, що коли $f(x)$ періодична з головним періодом T , то функція $y = kf(ax + b)$, де $k \neq 0$, $a \neq 0$, також періодична з головним періодом $T_1 = \frac{T}{|a|}$.

Вправа 13. Знайти головні періоди функцій:

- 1) $y = 3\sin 4x$;
- 2) $y = -5\cos(1 - 2x)$;
- 3) $y = 4\operatorname{ctg}\left(5x + \frac{\pi}{6}\right)$.

5.3. ГОЛОВНИЙ ПЕРІОД СУМИ ФУНКЦІЙ

Приклад 10. Знайти головний період функції $y = |\sin x| + |\cos x|$.

Розв'язання

Число $\frac{\pi}{2}$ є періодом поданої функції, оскільки

$$\left| \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \right| + \left| \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \right| = |\cos x| + |-\sin x| = |\sin x| + |\cos x|.$$

Нехай T — головний період заданої функції. Зрозуміло, що $0 < T \leq \frac{\pi}{2}$. Далі маємо

$$|\sin(x+T)| + |\cos(x+T)| = |\sin x| + |\cos x|.$$

Покладаючи в цій рівності $x=0$, дістанемо рівняння $\sin T + \cos T = 1$, або $\sin\left(T + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Найменший додатний розв'язок останнього рівняння $T = \frac{\pi}{2}$. Отже, шуканий головний період дорівнює $\frac{\pi}{2}$.

Зауваження 2. Кожна з функцій $y = |\sin x|$ та $y = |\cos x|$ має головний період $T = \pi$. Приклад 1 показує, що сумою двох функцій з однаковими головними періодами T може бути функція з головним періодом $T_1 < T$.

Вправа 14. Знайти головний період функції:

- 1) $y = |\operatorname{tg} x|$;
- 2) $y = |\operatorname{ctg} x|$;
- 3) $y = |\operatorname{tg} x| + |\operatorname{ctg} x|$.

Приклад 11. Відомо, що функція $f(x) = \sin x + \cos(ax)$ періодична. Довести, що a — раціональне число.

Доведення

Нехай T — період функції $f(x)$. Тоді функція $f(-x)$ також має період T , тому функції $g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = \cos(ax)$ та $h(x) = f(x) - g(x) = \sin x$ теж періодичні з періодом T .

Головний період функції $h(x)$ дорівнює 2π , звідси $T = 2\pi n$ із деяким цілим $n \neq 0$. Якщо $a = 0$, то твердження доведено, бо нуль є раціональним числом. Нехай тепер $a \neq 0$. Головний період функ-

ції $y = \cos x$ дорівнює 2π , і за теоремою 8 головний період функції $g(x)$ дорівнює $\frac{2\pi}{|a|}$. Звідси $T = \frac{2\pi}{|a|} \cdot m$ із деяким цілим $m \neq 0$. Із рівності $2\pi n = \frac{2\pi}{|a|} \cdot m$ знаходимо $a = \pm \frac{m}{n}$ — число раціональне.

З доведеного твердження випливає, що функція

$$f(x) = \sin x + \cos(\sqrt{2}x)$$

неперіодична, бо інакше число $\sqrt{2}$ було б раціональним. Ми бачимо, що сума двох періодичних функцій може бути функцією неперіодичною.

Означення 3. Відмінні від нуля числа T_1, T_2 називають сумірними, якщо їх відношення є числом раціональним. У протилежному випадку числа T_1, T_2 називають несумірними.

ТЕОРЕМА 9. Нехай $f(x)$ і $g(x)$ — неперервні на $\mathbb{R}$, відмінні від сталих та періодичні функції. Якщо головні періоди цих функцій несумірні, то функція $f(x) + g(x)$ неперіодична.

Різні доведення цього твердження містяться в [3], [4].

Вправа 15. Пояснити, як з теореми 9 випливає неперіодичність функцій:

$$1) y = \cos(\sqrt{3}x) - \sin(\sqrt{2}x);$$

$$2) y = \{x\} + \{\sqrt{5}x\}.$$

ТЕОРЕМА 10. Нехай задано дві періодичні функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ з періодами T_1 і T_2 , відповідно, причому $A = D(f_1) \cap D(f_2) \neq \emptyset$. Якщо числа T_1, T_2 сумірні, то функція $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, $x \in A$, є періодичною, причому існує її період T , сумірний із числами T_1 і T_2 .

Доведення

Уважатимемо числа T_1 і T_2 додатними. Із їх сумірності випливає, що $\frac{T_1}{T_2} = \frac{m}{n}$ або $T_1 n = T_2 m$, де m, n — натуральні. Розглянемо

число $T = T_1 n = T_2 m$ і доведемо, що T — період функції

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x), \quad x \in A.$$

Справді, нехай $x \in A$. Тоді обов'язково $x \in D(f_1)$, і числа $x - T = x - T_1 n$, $x + T = x + T_1 n$ належать $D(f_1)$. Аналогічно маємо $x \in D(f_2)$, і числа $x - T = x - T_2 m$, $x + T = x + T_2 m$ належать $D(f_2)$. Тому обидва числа $x \pm T$ лежать в $A = D(f_1) \cap D(f_2)$. Далі,

$$f(x+T) = f_1(x+T) + f_2(x+T) = f_1(x+T_1n) + f_2(x+T_2m) = f_1(x) + f_2(x) = f(x).$$

За означенням 1 функція $f(x)$ періодична на A .

Означення 4. Нехай T_1, T_2 — додатні сумірні числа. Найменшим спільним кратним цих чисел назвемо таке найменше число T , що відношення $\frac{T}{T_1}, \frac{T}{T_2}$ є натуральними числами. Позначатимемо це так: $T = \text{НСК}(T_1, T_2)$.

У випадку натуральних T_1, T_2 число T із цього означення є найменшим спільним кратним цих натуральних чисел у звичайному сенсі. Для сумірних додатних чисел T_1, T_2 число T можна побудувати так: нехай $\frac{T_1}{T_2} = \frac{m}{n}$, де $\frac{m}{n}$ — нескоротний дріб, тоді

$\text{НСК}(T_1, T_2) = T_1n = T_2m$. Як бачимо, так будувався період T у доведенні теореми 10. Тому справедливий такий наслідок.

Наслідок. Нехай задано дві періодичні функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ із сумірними головними періодами T_1 і T_2 відповідно, причому $A = D(f_1) \cap D(f_2) \neq \emptyset$. Тоді число $T = \text{НСК}(T_1, T_2)$ є періодом функції $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, $x \in A$.

Зауваження 3. В умовах наслідку не можна стверджувати, що $\text{НСК}(T_1, T_2)$ є головним періодом $f(x)$, (див. зауваження 1).

Приклад 12. Знайти головний період функції

$$f(x) = \text{ctg } 2x + \text{ctg } 3x.$$

Розв'язання

Головний період функції $f_1(x) = \text{ctg } 2x$ дорівнює $T_1 = \frac{\pi}{2}$, а головний період функції $f_2(x) = \text{ctg } 3x$ дорівнює $T_2 = \frac{\pi}{3}$. Тоді число $T = \text{НСК}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right) = \pi$ є періодом функції $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

Покажемо, що це головний період $f(x)$.

Функція $f(x)$ є неперервною періодичною функцією, відмінною від сталої, тому за теоремою 4 її головний період τ існує. Припустимо, що $\tau < \pi$. На відрізку $[0; \pi]$ точки $0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi$ не належать $D(f)$. Якщо $x \notin D(f)$, то $x + \tau \notin D(f)$ також. Покладаючи тут $x = 0$, дістанемо $\tau \in \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3} \right\}$.

Але $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} \in D(f)$, отже, $\tau \neq \frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \in D(f)$, отже, $\tau \neq \frac{\pi}{2}$;
 $\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{6} \in D(f)$, отже, $\tau \neq \frac{2\pi}{3}$.

Дістали суперечність з припущенням, що $\tau < \pi$. Тому шукане $\tau = \pi$.

Узагальнимо означення 3.

Означення 5. Відмінні від нуля числа $T_1, T_2, \dots, T_n$ називають сумірними, якщо відношення будь-яких двох чисел із цього набору є числами раціональними.

ТЕОРЕМА 11. Нехай задано періодичні функції $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ з періодами $T_1, T_2, \dots, T_n$ відповідно. Якщо ці числа сумірні, а області визначення $D(f_1), D(f_2), \dots, D(f_n)$ мають спільні точки, то функція

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x), \quad x \in D(f_1) \cap D(f_2) \cap \dots \cap D(f_n),$$

є періодичною, причому існує її період T , сумірний із числами $T_1, T_2, \dots, T_n$.

Доведення

Застосуємо метод математичної індукції. При $n=1$ твердження теореми є тавтологією. При $n=2$ це твердження справедливе за теоремою 10. Припустимо, що твердження справедливе при деякому $n=k, k \geq 2$. Доведемо його для $n=k+1$. Маємо періодичні функції $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x), f_{k+1}(x)$ з періодами $T_1, T_2, \dots, T_k, T_{k+1}$ відповідно, причому ці числа сумірні. Тоді за припущенням індукції функція $g(x) = f_1(x) + \dots + f_k(x)$ буде періодичною з деяким періодом τ_k , сумірним із кожним із періодів $T_1, T_2, \dots, T_k$. Ця функція визначена на множині $A_k = D(f_1) \cap D(f_2) \cap \dots \cap D(f_k)$. Оскільки число T_{k+1} сумірне з T_1 , а число τ_k також сумірне з T_1 , то числа τ_k та T_{k+1} сумірні. За базою індукції функція $f(x) = g(x) + f_{k+1}(x)$ буде періодичною з деяким періодом τ_{k+1} , сумірним із кожним із чисел τ_k та T_{k+1} . При цьому

$$D(f) = A_k \cap D(f_{k+1}) = D(f_1) \cap D(f_2) \cap \dots \cap D(f_{k+1}).$$

Отже, число τ_{k+1} сумірне з кожним із чисел $T_1, T_2, \dots, T_{k+1}$.

Для додатних сумірних чисел $T_1, T_2, \dots, T_n$ подібно до означення 4 вводиться поняття найменшого спільного кратного НСК($T_1, \dots, T_n$). Це таке найменше число T , що всі відношення $\frac{T}{T_k}, 1 \leq k \leq n$, є натуральними числами.

Вправа 16. Сформулювати та довести узагальнення наслідку з теореми 10 на випадок суми багатьох функцій.

Вправа 17. Знайти хоча б один період функції:

$$1) y = \sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) - 3\cos\left(6x + \frac{\pi}{4}\right);$$

$$2) y = \cos x + \cos 2x + \cos \frac{3}{4}x.$$

Далі розглядатимемо лише тригонометричні функції.

5.4. ДОСЛІДЖЕННЯ СУМИ ГАРМОНІЙНИХ КОЛИВАНЬ

Почнемо з функції

$$f(x) = A\sin(ax) + B\cos(bx), \quad A \neq 0, B \neq 0, a > 0, b > 0. \quad (2)$$

ТЕОРЕМА 12. Якщо числа a, b сумірні, то функція (2) періодична з головним періодом $T_f = 2\pi \cdot \text{НСК}\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$.

Доведення

Функція $f_1(x) = A\sin ax$ має головний період $T_1 = \frac{2\pi}{a}$, а функція

$f_2(x) = B\cos bx$ — головний період $T_2 = \frac{2\pi}{b}$. Оскільки числа a, b сумірні, то числа T_1, T_2 також сумірні. За наслідком із теореми 10,

число $T = \text{НСК}(T_1, T_2) = 2\pi \cdot \text{НСК}\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$ буде періодом функції

$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$. Покажемо, що це головний період $f(x)$. Нехай $\tau > 0$ — деякий період $f(x)$. Тоді τ буде також періодом функції $f(-x)$. Маємо

$$\frac{f(x) + f(-x)}{2} = B\cos bx, \quad \frac{f(x) - f(-x)}{2} = A\sin ax.$$

Тому τ є періодом функції $f_1(x)$, звідки $\tau = \frac{2\pi}{a}n$, $n \in \mathbb{N}$. Але

найменше додатне число, яке ділиться на $T_1 = \frac{2\pi}{a}$ та $T_2 = \frac{2\pi}{b}$, є числом $T = \text{НСК}(T_1, T_2)$. Отже, $\tau \geq T$ і T є насправді головним періодом $f(x)$.

Вправа 18. Знайти головний період функції

$$y = 4\cos \frac{x}{3} + 3\sin 5x.$$

Дещо складніше знаходиться головний період непарної функції

$$f(x) = A \sin ax + B \sin bx, \quad A \neq 0, \quad B \neq 0, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad a \neq b. \quad (3)$$

ТЕОРЕМА 13. Якщо a, b сумірні додатні числа, то функція (3) періодична з головним періодом $T_1 = 2\pi \cdot \text{НСК}\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$.

Доведення

Як і в попередній теоремі, число $T_f = 2\pi \cdot \text{НСК}\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$ є періодом $f(x)$. Покажемо, що це головний період $f(x)$.

Нехай $\tau > 0$ — деякий період $f(x)$. Під час доведення теореми 2 було показано, що функція $y = f'(x)$ також має період τ . Тоді і функція $y = (f'(x))' = f''(x) = -Aa^2 \sin ax - Bb^2 \sin bx$ матиме період τ .

Складемо систему рівнянь відносно $A \sin ax, B \sin bx$:

$$\begin{cases} f(x) = A \sin ax + B \sin bx, \\ f''(x) = -a^2 (A \sin ax) - b^2 (B \sin bx). \end{cases}$$

Звідси, враховуючи, що a, b — нерівні додатні числа, матимемо:

$$A \sin ax = \frac{b^2 f(x) + f''(x)}{b^2 - a^2}, \quad \sin ax = \frac{1}{A(b^2 - a^2)} (b^2 f(x) + f''(x)),$$

$$B \sin bx = \frac{a^2 f(x) + f''(x)}{a^2 - b^2}, \quad \sin bx = \frac{1}{B(a^2 - b^2)} (a^2 f(x) + f''(x)).$$

Тому функції $y = \sin ax$ та $y = \sin bx$ також мають період τ , який мусить бути кратним головним періодам цих функцій: $T_1 = \frac{2\pi}{a}$ та $T_2 = \frac{2\pi}{b}$. Отже, $\tau \geq T = 2\pi \cdot \text{НСК}(T_1, T_2)$ і T є насправді головним періодом $f(x)$.

Вправа 19. Знайти головний період функції

$$f(x) = \sin(1998x) + \sin(2000x).$$

Відповідь. $T = \pi$.

Вправа 20. Довести твердження, аналогічне теоремі 13, для функції $f(x) = A \cos ax + B \cos bx$.

Розглянемо тепер довільну суму гармонійних коливань

$$f(x) = \sum_{i=1}^n A_i \sin(a_i x + \varphi_i), \quad (4)$$

$$\text{де } A_i \neq 0, \varphi_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n, a_1 > a_2 > \dots > a_n > 0. \quad (5)$$

ЛЕМА 1. Нехай виконані умови (5). Якщо T — період функції (4), то T буде також періодом кожної з функцій $f_i(x) = \sin(a_i x + \varphi_i)$, $1 \leq i \leq n$.

Доведення

Застосуємо метод математичної індукції. При $n=1$ маємо $f(x) = A_1 f_1(x)$, і твердження випливає з обмеження $A_1 \neq 0$. Припустимо, що твердження справедливе для довільного $n=k$, $k \geq 1$, де A_i , φ_i , a_i , $1 \leq i \leq k$ — довільні параметри, що задовольняють (5). Доведемо його для $n=k+1$.

Розглянемо функцію $f(x) = \sum_{i=1}^{k+1} A_i \sin(a_i x + \varphi_i)$, де $A_i \neq 0$, $\varphi_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq k+1$, $a_1 > a_2 > \dots > a_{k+1} > 0$.

Нехай T — період цієї функції. Маємо

$$f''(x) = -\sum_{i=1}^{k+1} A_i a_i^2 \sin(a_i x + \varphi_i).$$

Тоді $a_{k+1}^2 f(x) + f''(x) = \sum_{i=1}^k A_i (a_{k+1}^2 - a_i^2) \sin(a_i x + \varphi_i)$. Оскільки $f''(x)$

теж має період T , то ця функція буде також періодична з цим періодом, причому коефіцієнти $B_i = A_i (a_{k+1}^2 - a_i^2) \neq 0$ при всіх $1 \leq i \leq k$. За припущенням індукції, T буде періодом кожної з функцій $f_i(x) = \sin(a_i x + \varphi_i)$, $1 \leq i \leq k$. Нарешті,

$$\sin(a_{k+1} x + \varphi_{k+1}) = \frac{1}{A_{k+1}} \left(f(x) - \sum_{i=1}^k A_i \sin(a_i x + \varphi_i) \right),$$

звідки випливає, що $f_{k+1}(x) = \sin(a_{k+1} x + \varphi_{k+1})$ теж має цей період. Наше твердження доведено для $n=k+1$. Згідно з методом математичної індукції, лема 1 доведена для всіх натуральних n .

ТЕОРЕМА 14. Нехай виконані умови (5). Якщо числа $a_1, \dots, a_n$ є сумірними, то функція (4) має головний період

$$T_f = 2\pi \cdot \text{НСК} \left(\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n} \right).$$

Якщо якась пара чисел a_i, a_j несумірна, то функція (4) неперіодична.

Доведення

- 1) Нехай числа $a_1, \dots, a_n$ сумірні. Функція $y = A_i \sin(a_i x + \varphi_i)$ має головний період $T_i = \frac{2\pi}{a_i}$, тому число

$$T = \text{НСК}(T, \dots, T_n) = 2\pi \cdot \text{НСК}\left(\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n}\right)$$

є періодом $f(x)$ (див. наслідок із теореми 10 та вправу 16). Доведемо, що це головний період $f(x)$.

Нехай $\tau > 0$ — деякий період $f(x)$. За лемою 1, це буде також період функції $f_i(x) = \sin(a_i x + \varphi_i)$, $1 \leq i \leq n$, тому τ мусить бути кратним числу $T_i = \frac{2\pi}{a_i}$. Звідси $\tau \geq \text{НСК}(T_1, \dots, T_n) = T$. Отже, це і є головний період $f(x)$.

- 2) Нехай зараз для деяких $i \neq j$ числа a_i, a_j несумірні. Припустимо, що $f(x)$ має період $\tau > 0$. Тоді за лемою обидві функції $f_i(x)$, $f_j(x)$ — мають період τ . Звідси $\tau = \frac{2\pi}{a_i} n = \frac{2\pi}{a_j} m$, де n, m — деякі

натуральні числа. Тоді $\frac{a_i}{a_j} = \frac{n}{m}$, і числа a_i, a_j сумірні. Отримана

суперечність доводить, що функція $f(x)$ неперіодична в цьому випадку.

Вправа 21. Знайти головний період функції

$$f(x) = \sin 3x + \cos 5x + \sin\left(10x - \frac{\pi}{4}\right).$$

5.5. ДОСЛІДЖЕННЯ СУМИ ТА ТАНГЕНСІВ

Почнемо з тригонометричної функції, де одним із доданків є функція тангенса.

Приклад 13. Знайти головний період функції

$$f(x) = \operatorname{tg} x + 3\sin(3x + \pi) - \cos\left(0,8x + \frac{\pi}{3}\right).$$

Розв'язання

Функція невизначена при $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Нехай $T > 0$ період $f(x)$, $x_0 \notin D(f)$. Тоді $x_0 + T$ також не належить $D(f)$. Маємо для

деяких натуральних m, n , що $x_0 = \frac{\pi}{2} + m\pi$, $x_0 + T = \frac{\pi}{2} + n\pi$. Звідси $T = (n - m)\pi$, отже, T кратне числу π і T — період функції $f_1(x) = \operatorname{tg} x$.

Розглянемо функцію

$$g(x) = f(x) - \operatorname{tg} x = 3\sin(3x + \pi) - \cos\left(0,8x + \frac{\pi}{3}\right), \quad x \in D(f).$$

Вона періодична з періодом T як різниця двох T -періодичних функцій $f(x)$ та $f_1(x)$. Продовжимо функцію $g(x)$ до неперервної функції $h(x)$ на $\mathbb{R}$:

$$h(x) = 3\sin(3x + \pi) - \cos\left(0,8x + \frac{\pi}{3}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Функція $h(x)$ також періодична з періодом T . Справді, коли $x_0 \in D(f)$, матимемо $x_0 + T \in D(f)$, і

$$h(x_0) = g(x_0) = g(x_0 + T) = h(x_0 + T).$$

Нехай тепер $y_0 \notin D(f)$. Тоді існує послідовність $\{y_n\}$ точок із $D(f)$, що збігається до y_0 . Матимемо внаслідок неперервності $h(x)$:

$$h(y_0 + T) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(y_n + T) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(y_n + T) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(y_n) = h(y_0).$$

Отже, при всіх дійсних x виконується $h(x + T) = h(x)$, і $h(x)$ також періодична з періодом T . Далі, за лемою 1, число T є періодом кожної з функцій $h_1(x) = \sin(3x + \pi)$, $h_2(x) = \cos\left(0,8x + \frac{\pi}{3}\right)$, тому

T є кратним чисел $\frac{2\pi}{3}$ та $\frac{2\pi}{0,8} = \frac{5\pi}{2}$. Остаточню T ділиться на числа

$$\pi = \frac{6\pi}{6}, \quad \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{6}, \quad \frac{5\pi}{2} = \frac{15\pi}{6}. \quad \text{Тому}$$

$$\begin{aligned} T &\geq \text{НСК}\left(\frac{6\pi}{6}, \frac{4\pi}{6}, \frac{15\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} \cdot \text{НСК}(6, 4, 15) = \\ &= \frac{\pi}{6} \cdot \text{НСК}(2 \cdot 3, 2^2 \cdot 3 \cdot 5) = \frac{\pi}{6} (2^2 \cdot 3 \cdot 5) = 10\pi. \end{aligned}$$

Число 10π є періодом кожного з доданків функції $f(x)$, тому головний її період дорівнює 10π .

Для суми двох тангенсів можна дати вичерпне дослідження періодичності.

ЛЕМА 2. Нехай $T > 0$ — період функції

$$f(x) = A \operatorname{tg}(ax + \varphi) + B \operatorname{tg}(bx + \psi), \quad a > b > 0, \quad (6)$$

де A, B, φ, ψ — довільні дійсні числа. Тоді T є періодом кожної з функцій $f_1(x) = \operatorname{tg}(ax + \varphi)$ та $f_2(x) = \operatorname{tg}(bx + \psi)$.

Доведення

Під час паралельного перенесення на T кожна асимптота функції $f_1(x)$ переходить або в асимптоту цієї ж функції, або в асимптоту функції $f_2(x)$. Розглянемо можливі випадки.

- 1) Деяка асимптота $f_1(x)$ під час перенесення на T переходить в асимптоту $f_2(x)$, тоді T є періодом $f_1(x)$. Тому функція

$$g(x) = f(x) - Af_1(x) = Bf_2(x), \quad x \in D(f_1) \cap D(f_2),$$

також періодична з періодом T . Розглянемо продовження функції $g(x)$ — функцію $h(x) = Bf_2(x)$, $x \in D(f_2)$.

Вона також періодична з періодом T . Справді, при $t \in D(f)$ матимемо:

$$h(t) = g(t) = g(t+T) = h(t+T).$$

При $t_0 \in D(f_1)$, $t_0 \notin D(f_2)$ для послідовності $t_n \in D(f)$, що збігається до t_0 , матимемо:

$$\begin{aligned} h(t_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} h(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (t_n + T) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} h(t_n + T) = h(t_0 + T). \end{aligned}$$

Тому $h(x+T) = h(x)$ при всіх $x \in D(f_2)$, і $h(x)$ періодична з періодом T . Для цього випадку лема доведена.

- 2) Аналогічні міркування у випадку, коли деяка асимптота $f_2(x)$ під час перенесення на T переходить в асимптоту $f_1(x)$.
- 3) Кожна асимптота $f_1(x)$ під час перенесення на T переходить в асимптоту $f_2(x)$, і навпаки. Покажемо, що при $a > b$ це неможливо. Нехай $N_1[0; B]$ та $N_2[0; B]$ — кількість асимптот функції $f_1(x)$ та $f_2(x)$ відповідно на відрізку $[0; B]$, де $B > 0$. Під час перенесення на T кожна асимптота функції $f_1(x)$ з проміжку $[0; B]$ переходить в асимптоту $f_2(x)$ з відрізка $[0; B+T]$, а кожна асимптота функції $f_2(x)$ з проміжку $[0; B+T]$ переходить в асимптоту $f_1(x)$ з відрізка $[0; B+2T]$, тому

$$N_1[0; B] \leq N_2[0; B+T] \leq N_1[0; B+2T]. \quad (7)$$

Оскільки асимптоти $f_1(x)$ чергуються з кроком $\frac{\pi}{a}$, то

$$\lim_{B \rightarrow +\infty} \frac{N_1[0; B]}{B} = \frac{a}{\pi}, \text{ аналогічно } \lim_{B \rightarrow +\infty} \frac{N_2[0; B]}{B} = \frac{b}{\pi}. \text{ Тоді з (7) маємо}$$

$$\frac{N_1[0; B]}{B} \leq \frac{N_2[0; B+T]}{B+T} \cdot \frac{B+T}{B} \leq \frac{N_1[0; B+T]}{B+2T} \cdot \frac{B+2T}{B},$$

звідки

$$\begin{aligned} \lim_{B \rightarrow +\infty} \frac{N_1[0; B]}{B} &\leq \lim_{B \rightarrow +\infty} \frac{N_2[0; B+T]}{B+T} \cdot \lim_{B \rightarrow +\infty} \frac{B+T}{B} \leq \\ &\leq \lim_{B \rightarrow +\infty} \frac{N_1[0; B+2T]}{B+2T} \cdot \lim_{B \rightarrow +\infty} \frac{B+2T}{B} \text{ або} \\ &\frac{a}{\pi} \leq \frac{b}{\pi} \leq \frac{a}{\pi}, \quad a = b. \end{aligned}$$

Отже, випадок 3) неможливий, і лема 2 повністю доведена.

ТЕОРЕМА 15. Розглянемо функцію (6). Якщо числа a, b несумірні, то вона неперіодична. Якщо ж ці числа сумірні, то головний період $f(x)$ дорівнює $T_f = \pi \cdot \text{НСК}\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$.

Доведення

- 1) Нехай числа a, b сумірні, тоді число $T_f = \pi \cdot \text{НСК}\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right) = \text{НСК}\left(\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{b}\right)$

є періодом $f(x)$, бо періодами доданків $f_1(x)$ та $f_2(x)$ є числа $\frac{\pi}{a}$

та $\frac{\pi}{b}$ відповідно. Нехай $T > 0$ — період $f(x)$. За лемою 2, T

є періодом обох функцій $f_1(x), f_2(x)$, тому t є кратним чисел $\frac{\pi}{a}$ та $\frac{\pi}{b}$, звідки $T \geq \tau$. Отже, τ — головний період $f(x)$.

- 2) Нехай числа a, b несумірні. Припустимо, що існує період T функції $f(x)$. Тоді T буде також періодом $f_1(x)$ та $f_2(x)$, звідки

$$T : \frac{\pi}{a} = \frac{aT}{\pi} \in \mathbb{Z}, \quad T : \frac{\pi}{b} = \frac{bT}{\pi} \in \mathbb{Z}.$$

Тоді $\frac{aT}{\pi} : \frac{bT}{\pi} = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Отримали протиріччя. Тому функція $f(x)$

неперіодична. Теорему доведено.

Значно складніше досліджувати суму трьох і більше тангенсів. Наведемо кілька результатів у цьому напрямку. Розглянемо функцію

$$f(x) = \sum_{i=1}^n A_i \operatorname{tg}(a_i x + \varphi_i), \quad (8)$$

де $A_i \neq 0$, $a_i > 0$, $1 \leq i \leq n$. Позначимо через $\min(b_1, b_2, \dots, b_n)$ найменше з чисел $b_1, b_2, \dots, b_n$.

ТЕОРЕМА 16. Нехай $T > 0$ — період функції (8), тоді

$$T \geq \frac{\pi}{n} \cdot \min\left(\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n}\right). \quad (9)$$

Доведення

Візьмемо довільне $x_0 \notin D(f)$ і розглянемо числа $x_0, x_0 + T, \dots, x_0 + nT$. У цих точках функція $f(x)$ не визначена, тому кожна з цих точок належить принаймні одній із множин $D(f_i)$, $1 \leq i \leq n$, де $f_i(x) = \operatorname{tg}(a_i x + \varphi_i)$. Але таких множин n , а точок маємо $n+1$. За принципом Діріхле [5], знайдуться принаймні дві точки $x_0 + T, x_0 + lT$, де $0 \leq k \leq l \leq n$, які потрапляють в одну множину $D(f_i)$. Різниця цих чисел $(l-k)T$ задає відстань між деякими двома асимптотами функції $f_i(x)$. Асимптоти знаходяться з рівняння

$$a_i x + \varphi_i = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad \text{або} \quad x = \frac{1}{a_i} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_i \right) + \frac{\pi}{a_i} n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Тоді при деякому натуральному m виконується рівність $(l-k)T = \frac{\pi}{a_i} m$.

$$\text{Далі, } \pi \cdot \min\left(\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n}\right) \leq \frac{\pi}{a_i} m \leq nT, \text{ звідки } T \geq \frac{\pi}{2} \cdot \min\left(\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n}\right).$$

Рівність у (9) може досягатись, наприклад, при $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Приклад 14. Довести, що головний період функції $g(x) = \sum_{i=1}^n \left(x + \frac{\pi(i-1)}{n} \right)$ дорівнює $\frac{\pi}{n}$.

Доведення

При $x \in D(g)$ маємо:

$$\begin{aligned} g\left(x + \frac{\pi}{n}\right) &= \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{n}\right) + \operatorname{tg}\left(x + \frac{2\pi}{n}\right) + \dots + \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi(n-1)}{n}\right) + \operatorname{tg}(x + \pi) = \\ &= \operatorname{tg}(x) + \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{n}\right) + \dots + \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi(n-1)}{n}\right) = g(x). \end{aligned}$$

Як бачимо, $x + \frac{\pi}{n} \in D(g)$; аналогічно впевнюємося, що $x - \frac{\pi}{n} \in D(g)$. Тому $\frac{\pi}{n}$ є періодом $g(x)$.

Далі, за теоремою 16, головний період $T_g \geq \frac{\pi}{n} \cdot \min(1, 1, \dots, 1) = \frac{\pi}{n}$.

Приклад 15. Нехай $T > 0$ — період функції $f(x) = \sum_{i=1}^n \operatorname{tg}(a_i x + 1)$, де $a_i > 0$, $1 \leq i \leq n$. Довести, що $T \geq \pi \cdot \min\left(\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n}\right)$.

Доведення

Не обмежуючи загальності, можна вважати, що $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$.

Область визначення $f(x)$ знаходиться з умови $a_i x + 1 \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$,

або $x \neq \frac{1}{a_i} \left(\frac{\pi}{2} - 1 + \pi n \right)$, $1 \leq i \leq n$. Найменше з таких додатних заборонених значень є число $x_+ = \frac{1}{a_i} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$, а найбільше з від'ємних заборонених значень є число $x_- = \frac{1}{a_i} \left(-\frac{\pi}{2} - 1 \right)$; число нуль належить

$D(f)$. Тоді

$$T \geq x_+ - x_- = \frac{\pi}{a_1} = \pi \cdot \min\left(\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n}\right).$$

За додаткових умов на параметри можна знайти головний період (8).

Вимагатимемо, щоб

$$a_1 > a_2 > \dots > a_n > 0. \quad (10)$$

Уведемо числа $b_i = \frac{A_i}{a_i}$, $1 \leq i \leq n$. Накладемо такі обмеження:

із цих чисел не можна виділити дві групи з однаковою сумою, тобто для різних номерів $i_1, \dots, i_s, j_1, \dots, j_p$ завжди

$$b_{i_1} + \dots + b_{i_s} \neq b_{j_1} + \dots + b_{j_p}. \quad (11)$$

Ця вимога виконується, наприклад, коли $b_i = 2^i$, $1 \leq i \leq n$.

ЛЕМА 3. Нехай $T > 0$ — період функції (8) та виконані умови (10), (11). Тоді T є періодом кожної з функцій

$$f_i(x) = \operatorname{tg}(a_i x + \varphi_i), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Доведення

Нехай $x = x_0$ — асимптота функції $f_i(x)$.

Для деякого цілого m маємо $a_i x_0 + \varphi_i = \frac{\pi}{2} + \pi m$. Розглянемо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) f_i(x) &= \lim_{\substack{x - x_0 = t \\ t \rightarrow 0}} t \cdot \operatorname{tg}(a_i x_0 + \varphi_i + a_i t) = \\ &= -\lim_{t \rightarrow 0} t \cdot \operatorname{ctg}(a_i t) = -\left(\lim_{t \rightarrow \infty} \cos(a_i t) \right) : \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin(a_i t)}{a_i t} \cdot a_i \right) = -\frac{1}{a_i}. \end{aligned}$$

Якщо в точці x_0 знаходяться асимптоти функцій $f_{i_1}, \dots, f_{i_s}$, а інші функції f_i визначені в x_0 , то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) f(x) = \sum_{k=1}^s A_{i_k} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) f_{i_k}(x) = -\sum_{k=1}^s \frac{A_{i_k}}{a_{i_k}} = -(b_{i_1} + \dots + b_{i_s}). \quad (12)$$

Розглянемо точку $x_0 + T$. У ній повинні бути асимптоти деяких функцій $f_{i_1}, \dots, f_{i_p}$, причому всі інші функції f_j визначені в точці $x_0 + T$. Тоді

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + T} (x - x_0 - T) f(x) = -(b_{j_1} + \dots + b_{j_p}). \quad (13)$$

Але

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0 + T} (x - x_0 - T) f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0 + T} (x - x_0 - T) f(x - T) = \\ &= \lim_{\substack{x - T = t \\ t \rightarrow x_0}} t f(t). \end{aligned}$$

Границі (12) і (13) рівні, тому $b_{i_1} + \dots + b_{i_s} = b_{j_1} + \dots + b_{j_p}$. З умови (11) випливає, що $p = s$, причому набори $i_1, \dots, i_s$ та $j_1, \dots, j_p$ є однаковими. Отже, кожна асимптота f_i під час паралельного перенесення на T переходить в асимптоту цієї ж функції. Отже, T є періодом f_i . Лему доведено.

ТЕОРЕМА 17. Розглянемо функцію (8), параметри якої задовольняють умови (10), (11). Якщо деяка пара чисел a_i, a_j несумірною, то ця функція неперіодична. Якщо є числа $a_1, \dots, a_n$ сумірні, то головний період

$$T_f = \pi \cdot \operatorname{НСК} \left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n} \right).$$

Доведення спирається на лему 3 і проводиться за тією самою схемою, що і доведення теореми 15.

Вправа 22. Знайти головний період функції

$$f(x) = \operatorname{tg}(2x) + \operatorname{tg}(12x) + \dots + \operatorname{tg}(2^n(2n-1)x).$$

Теорема 15 показує, що у випадку $n = 2$ вимога (11) $\frac{A_1}{a_1} \neq \frac{A_2}{a_2}$

є зайвою. За допомогою комплексних чисел можна показати, що в теоремі 17 обмеження (11) можна відкинути. Справедливе таке загальне твердження (див. [1], с. 121–124).

ТЕОРЕМА 18. Розглянемо функцію

$$f(x) = \sum_{i=1}^n A_i \operatorname{tg}(a_i x + \varphi_i), \text{ де } A_i \neq 0, 1 \leq i \leq n, a_1 > a_2 > \dots > a_n > 0.$$

Якщо деякі числа a_i, a_j несумірні, то функція f неперіодична. Якщо ж числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ сумірні, то головний період заданої функції T_f дорівнює

$$T_f = \pi \cdot \operatorname{НСК}\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}\right).$$

ЛІТЕРАТУРА

1. *Вибрані матеріали турнірів юних математиків України: Навчальний посібник / Укладач та заг. ред. К. В. Рабець.* — Суми : СумДПУ ім. А. С. Макаренка, 2007.
2. *Вишенський В. А., Перестюк М. О., Самойленко А. М.* Збірник задач з математики. — К. : Либідь, 1993.
3. *Мітельман І. М.* Дещо про всюди щільні множини та періодичні функції // У світі математики 2. — 1996. — № 4. — С. 6–13.
4. *Сарана О. А.* Деякі нестандартні задачі, пов'язані з природою ірраціональних чисел // У світі математики 4. — 1998. — № 3. — С. 26–29.
5. *Ядренко М. Й.* Принцип Діріхле та його застосування. — К. : Вища школа, 1985.

§ 6. Етюди про сім'ю функцій

Розглянемо функцію $f(x) = f_{\lambda}(x) = e^{\lambda \sin x} + e^{\lambda \cos x}$, $x \in \mathbb{R}$, де $\lambda \in \mathbb{R}$ — параметр. Дослідимо її властивості.

Область визначення функції — вся числова вісь. Сама функція — ні парна, ні непарна, додатна на всій області визначення, неперервна і періодична з періодом $T = 2\pi$. Якщо для деякої функції $\varphi(x)$ виконується тотожність $\varphi(2a - x) = \varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, то пряма $x = a$ є віссю симетрії графіка функції $\varphi(x)$.

Для заданої функції справедлива тотожність

$$f\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k - x\right) = f(x), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Отже, будь-яка пряма $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, є віссю симетрії графіка заданої функції.

Помітимо, що $f_{\lambda}(\pi + x) = e^{-\lambda \sin x} + e^{-\lambda \cos x} = f_{\mu}(x)$, де $\mu = -\lambda$.

Тому паралельне перенесення графіка функції ліворуч (або праворуч) уздовж осі Ox на π одиниць перетворює його на графік функції $f_{-\lambda}(x)$. Із цієї причини ми, як правило, розглядатимемо функції $f_{\lambda}(x)$, лише коли $\lambda > 0$ (якщо $\lambda = 0$, то $f(x) = 2$).

Оскільки функція $f(x) = f_{\lambda}(x) = e^{\lambda \sin x} + e^{\lambda \cos x}$, $x \in \mathbb{R}$, періодична і неперервна, то вона обмежена і досягає найбільшого і найменшого значень. Спочатку знайдемо точки, у яких ці значення досягаються.

1. Коли $\lambda > 0$, то точками найменшого значення функції є точки

$$x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Доведення

За нерівністю Коші між середнім арифметичним і середнім геометричним, коли $\lambda > 0$, матимемо:

$$e^{\lambda \sin x} + e^{\lambda \cos x} \geq 2\sqrt{e^{\lambda \sin x} \cdot e^{\lambda \cos x}} = 2e^{\frac{\lambda}{\sqrt{2}} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} \geq 2e^{-\frac{\lambda}{2}}.$$

Рівність досягається, коли значення x є розв'язками системи:

$$\begin{cases} e^{\lambda \sin x} = e^{\lambda \cos x}, \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1. \end{cases}$$

Звідси $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Отже, $\min_{x \in \mathbb{R}} f_{\lambda}(x) = f\left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right) = 2e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}}$.

2. Коли $0 < \lambda \leq \sqrt{2}$, то точками найбільшого значення є точки $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Доведення

Ураховуючи періодичність і знаки функцій $\sin x$, $\cos x$, можна стверджувати, що точки найбільшого значення функції належать проміжкам $\left[2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$.

Покажемо, що єдиною стаціонарною точкою на проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ є точка $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

Маємо

$$f'(x) = \lambda(e^{\lambda \sin x} \cdot \cos x - e^{\lambda \cos x} \cdot \sin x).$$

На кінцях проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ похідна на нуль не перетворюється.

Тоді

$$\begin{cases} f'(x) = 0, \\ x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right); \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda(\sin x - \cos x) = \ln \operatorname{tg} x, \\ x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

Точка $x_0 = \frac{\pi}{4}$ задовольняє цю систему.

Покажемо, що інших розв'язків система не має. Порівняємо похідні лівої і правої частин рівняння системи:

$$(\lambda(\sin x - \cos x))' = \lambda(\cos x + \sin x) = \lambda\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right);$$

$$(\ln \operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2}{\sin 2x}.$$

Тоді при $0 < \lambda \leq \sqrt{2}$, $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ виконується

$$(\lambda(\sin x - \cos x))' \leq 2 \leq (\ln \operatorname{tg} x)',$$

причому рівність досягається, лише коли $\lambda = \sqrt{2}$, $x = \frac{\pi}{4}$.

Тому для

$$q(x) = \lambda(\sin x - \cos x) - \ln \operatorname{tg} x, \quad x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

матимемо

$$q'(x) < 0, \text{ коли } x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \text{ і } q'\left(\frac{\pi}{4}\right) \leq 0.$$

Отже, $q(x)$ строго спадає на $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, і коли $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$, то

$$q(x) > q\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,$$

а коли $x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$, то $q(x) < q\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

Отже, єдиний нуль похідної на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ — це точка $x_0 = \frac{\pi}{4}$. Це і є точка найбільшого значення заданої функції.

$$\text{Отже, } \max_{x \in \mathbb{R}} f_{\lambda}(x) = f\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right) = 2e^{\frac{\lambda}{\sqrt{2}}}.$$

На рис. 1 показано графік заданої функції, коли $\lambda = 1$.

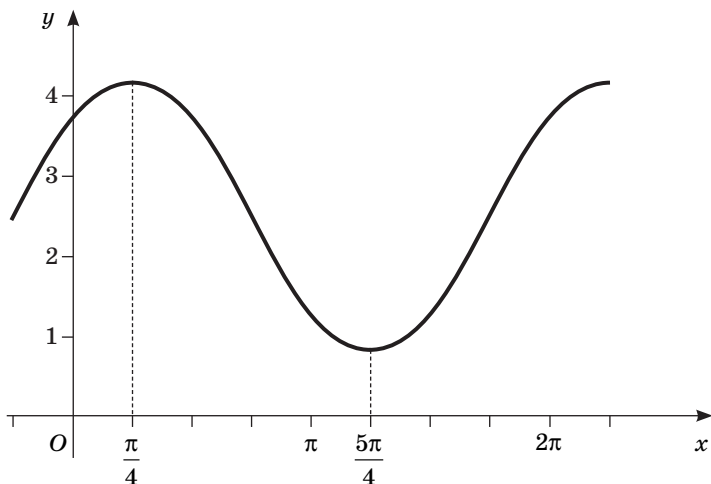


Рис. 1

3. Коли $\lambda > \sqrt{2}$, то на відрізку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ функція $f(x)$ має дві точки найбільшого значення x_1 та x_2 , які симетричні відносно точки $x = \frac{\pi}{4}$: $x_1 \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ і $x_2 = \frac{\pi}{2} - x_1$, $x_2 \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$, причому $x_1 = x_1(\lambda) \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow +\infty$.

Доведення

Знайдемо першу і другу похідні заданої функції:

$$f'(x) = \lambda(e^{\lambda \sin x} \cdot \cos x - e^{\lambda \cos x} \cdot \sin x);$$

$$f''(x) = \lambda(-e^{\lambda \sin x} \cdot \sin x + \lambda e^{\lambda \sin x} \cdot \cos^2 x - e^{\lambda \cos x} \cdot \cos x + \lambda e^{\lambda \cos x} \cdot \sin^2 x).$$

Найбільшого значення $f(x)$ досягає на проміжках $\left[2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, тому достатньо розглянути проміжок $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. На кінцях цього проміжку похідна $f'(x)$ на нуль не перетворюється. Отже, найбільше значення досягається на $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Маємо

$$\begin{cases} f'(x) = 0, \\ x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right); \\ \frac{e^{\lambda \sin x}}{\sin x} = \frac{e^{\lambda \cos x}}{\cos x}, \\ x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

Число $x_0 = \frac{\pi}{4}$ — одна зі стаціонарних точок:

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \lambda e^{\frac{\lambda}{\sqrt{2}}} (\lambda - \sqrt{2}) > 0, \text{ коли } \lambda > \sqrt{2}.$$

Отже, $\frac{\pi}{4}$ — точка локального мінімуму. Далі, при $\lambda > \sqrt{2}$ шукаємо інші стаціонарні точки на $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Нехай $\sin x = u$, $\cos x = v$, $u > 0$, $v > 0$, $u^2 + v^2 = 1$.

Графік функції $\varphi(u) = \frac{e^{\lambda u}}{u}$, $0 < u \leq 1$ показаний на рис. 2. Похідна і найменше значення цієї функції дорівнюють:

$$\varphi'(u) = \frac{e^{\lambda u}(\lambda u - 1)}{u^2}, \quad \min_{u>0} \varphi(u) = \varphi\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \lambda e.$$

Стаціонарні точки задовольняють систему

$$\begin{cases} \varphi(u) = \varphi(v), \\ u^2 + v^2 = 1, \\ u > 0, v > 0. \end{cases}$$

Вимога $u = v$ приводить до значення $x = \frac{\pi}{4}$.

Якщо $u \neq v$, то шукані розв'язки $(u_0; v_0)$ показано на рис. 2. Пряма $y = c$, яка відповідає розв'язкам системи, існує і єдина:

✓ якщо $c = \varphi\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \lambda e$, то $u_0 = v_0$ і $u_0^2 + v_0^2 = \frac{2}{\lambda^2} < 1$,

✓ якщо $c = \varphi(1) = \lambda e$, то $u_0^2 + v_0^2 = u_0^2 + 1 > 1$.

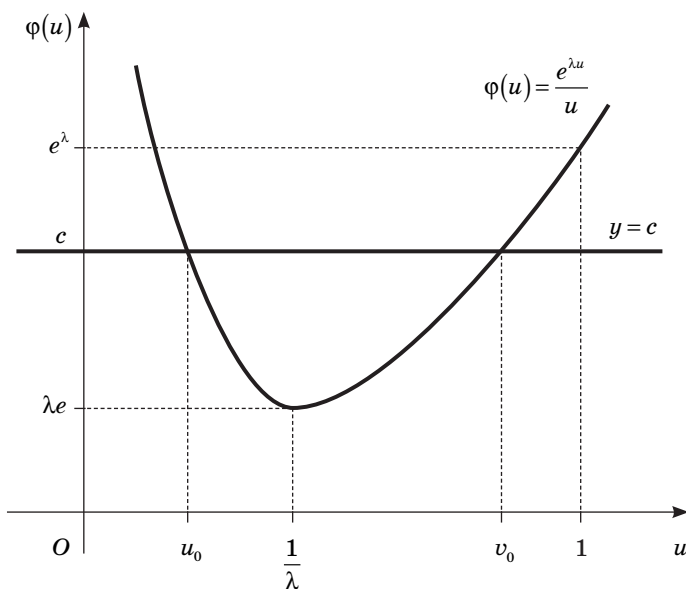


Рис. 2

Тому, внаслідок неперервності $u_0^2 + v_0^2$ як функції від c та за теоремою Коші про проміжне значення, таке розташування прямої $y = c$ існує. Воно єдине через монотонну залежність $u_0^2 + v_0^2$ від c .

Отже, на $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ є ще одна стаціонарна точка, що відповідає $u_0 \in \left(0; \frac{1}{\lambda}\right)$ і $x_1 = \arcsin u_0$. Друга стаціонарна точка $x_2 = \frac{\pi}{2} - x_1$ симетрична x_1 відносно точки $x = \frac{\pi}{4}$, причому $f(x_1) = f(x_2)$.

Числа x_1 і x_2 — точки найбільшого значення функції, бо інших стаціонарних точок, крім точок x_1 , x_2 і $x_0 = \frac{\pi}{4}$, на відріжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ немає, а x_0 — точка локального мінімуму при $\lambda > \sqrt{2}$. Отже, єдина можливість — це та, що найбільше значення досягається, коли $x = x_1 = x_1(\lambda) = x_2$.

Далі, $0 < x_1(\lambda) = \arcsin u_0 \leq \arcsin \frac{1}{\lambda} \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow +\infty$, отже, $x_1(\lambda) \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow +\infty$.

На рис. 3 показано графік заданої функції, коли $\lambda = 2$.

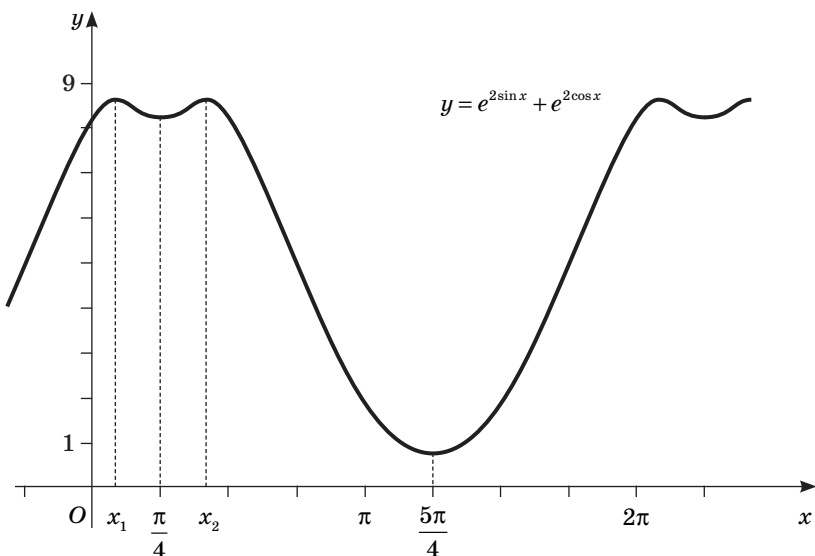


Рис. 3

Зауваження. Коли $\lambda = \sqrt{2}$, то $x_0 = \frac{\pi}{4}$ — точка найбільшого значення, однак $f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \lambda e^{\frac{\lambda}{\sqrt{3}}}(\lambda - \sqrt{2}) = 0$. Тому $f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ при $\lambda = \sqrt{2}$.

Інакше точка $\frac{\pi}{4}$ не буде точкою локального максимуму, коли $\lambda = \sqrt{2}$ [1; ч. 158, теорема 3].

Розрахунки показують, що $f^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right) \neq 0$, і тоді $f^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$ (якби $f^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0$, то точка $\frac{\pi}{4}$ була б точкою строго локального мінімуму).

Коли $\lambda = \sqrt{2}$, то функція дуже гладка навколо точки $x_0 = \frac{\pi}{4}$ (див. рис. 4). Причина такої гладкості полягає в тому, що в околі точки $\frac{\pi}{4}$ графік функції $y = f_{\sqrt{2}}(x)$ мало відрізняється від параболи четвертого степеня:

$$y = f\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\left|f^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|}{4!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4.$$

Ми скористалися тут формулою Тейлора [1; с. 141].

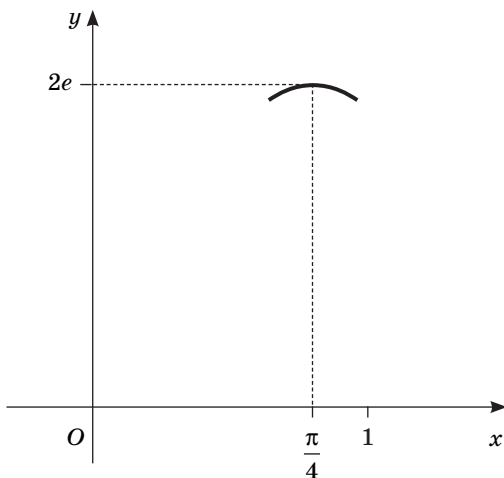


Рис. 4

4. Розглянемо графік функції із заданої сім'ї при $\lambda \in [-\alpha; \alpha]$, де $\alpha > 0$ (рис. 5, 6).

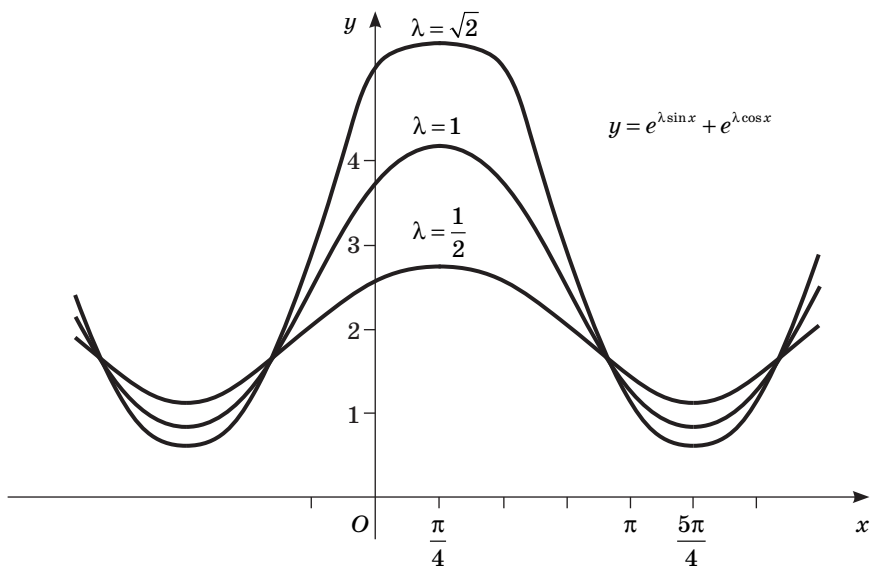


Рис. 5

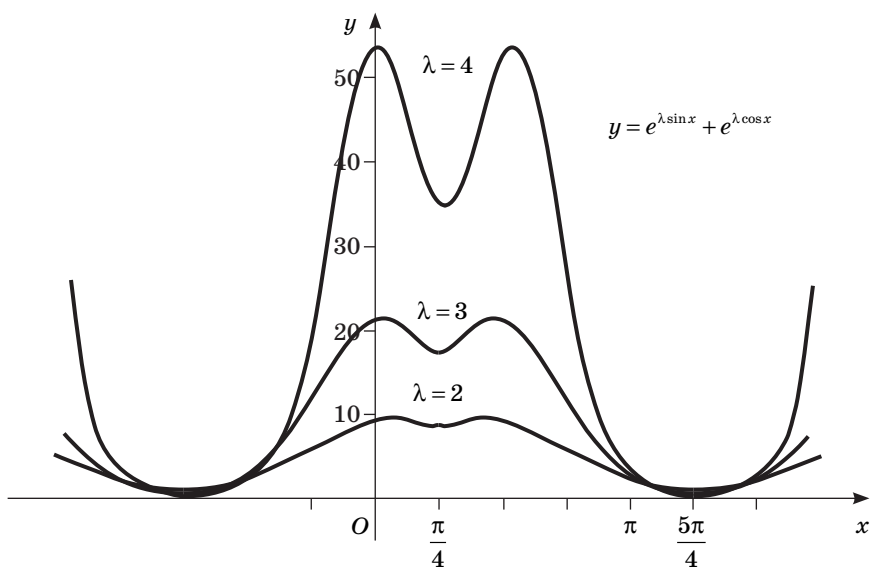


Рис. 6

Візуально здається, що всі вони проходять через одну точку A . Покажемо спочатку, що насправді такої точки немає, а потім покажемо точку, недалеко від якої проходять усі ці графіки.

Зафіксуємо x і знайдемо похідну від $f_\lambda(x)$ за змінною λ : $\frac{d}{d\lambda}f_\lambda(x) = e^{\lambda \sin x} \cdot \sin x + e^{\lambda \cos x} \cdot \cos x$. (Фактично це є частинна похідна за змінною λ . У курсі математичного аналізу вона позначається через $\frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial \lambda}$, де $f(x, \lambda) = f_\lambda(x)$, але у наведеній статті ми не будемо користуватися цим позначенням.)

Припустимо, що існує точка $A(x_A; y)$, через яку проходять усі графіки заданої сім'ї, коли $\lambda \in (-\lambda_1; \lambda_1)$, $\lambda_1 > 0$. Тоді

$$\frac{d}{d\lambda}f_\lambda(x_A) = 0 \quad (1)$$

при всіх $\lambda \in [-\lambda_1; \lambda_1]$.

Нехай $\lambda = 0$. Тоді $\left. \frac{d}{d\lambda}f_\lambda(x_A) \right|_{\lambda=0} = \sin x + \cos x = 0$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Але в цих точках

$$\frac{d}{d\lambda}f_\lambda(x) = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}} \left(e^{\frac{\lambda}{\sqrt{2}}} - e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}} \right) = \pm \sqrt{2} \operatorname{sh} \left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}} \right),$$

і функція $\operatorname{sh} \left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}} \right)$ строго зростає на λ , отже, тотожність (1) не виконується і спільної точки у графіків немає.

(Тут і нижче ми використовуємо функції гіперболічний синус $\operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ та гіперболічний косинус $\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$. Про ці функції можна прочитати в [2, с. 107].)

У пошуках близької точки до графіків розглянемо рівняння

$$\left. \frac{d}{d\lambda}f_\lambda(x) \right|_{\lambda=0} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Графіки проходять через точки

$$M_1 \left(-\frac{\pi}{4}; e^{\frac{\lambda}{\sqrt{2}}} + e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}} \right) = M_1 \left(-\frac{\pi}{4}; 2 \operatorname{ch} \left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}} \right) \right)$$

$$\text{і } M_2 \left(\frac{3\pi}{4}; 2 \operatorname{ch} \left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}} \right) \right).$$

Оцінимо, як близько графіки проходять один до одного біля цих точок. Через симетрію відносно прямої $x = \frac{\pi}{4}$ достатньо розглянути точку M_2 , якій відповідають значення

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

За формулою Тейлора із залишковим членом у формі Лагранжа для $x = \frac{3\pi}{4}$, матимемо

$$f_{\lambda}(x) = f_0(x) + \left. \frac{df_{\lambda}(x)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} \cdot \lambda + \left. \frac{d^2 f_{\lambda}(x)}{d\lambda^2} \right|_{\lambda=0} \cdot \frac{\tilde{\lambda}^2}{2},$$

де $|\tilde{\lambda}| \leq |\lambda|$, $\tilde{\lambda}$ — проміжна точка між 0 і λ .

Тоді, коли $x = \frac{3\pi}{4}$, матимемо:

$$\begin{aligned} f_{\lambda}(x) &= 2 + \frac{\lambda^2}{2} \left(e^{\tilde{\lambda} \sin x} \cdot \sin^2 x + e^{\tilde{\lambda} \cos x} \cdot \cos^2 x \right) = \\ &= 2 + \frac{\lambda^2}{4} \left(e^{\frac{\tilde{\lambda}}{\sqrt{2}}} + e^{-\frac{\tilde{\lambda}}{\sqrt{2}}} \right) = 2 + \frac{\lambda^2}{4} \operatorname{ch} \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

Отже,

$$2 \leq f_{\lambda}(x) \leq 2 + \frac{\lambda_1^2}{2} \operatorname{ch} \left(\frac{\lambda_1}{\sqrt{2}} \right),$$

коли $|\lambda| \leq \lambda_1$.

Розглянемо точку $N \left(\frac{3\pi}{4}; \frac{\lambda_1^2}{4} \operatorname{ch} \left(\frac{\lambda_1}{\sqrt{2}} \right) \right)$.

Коли $x = \frac{3\pi}{4}$, $|\lambda| \leq |\lambda_1|$, матимемо

$$|f_{\lambda}(x) - y_N| \leq \frac{\lambda_1^2}{4} \operatorname{ch} \left(\frac{\lambda_1}{\sqrt{2}} \right).$$

Позначимо праву частину нерівності через Δ .

Коли $|\lambda| \leq \lambda_1$, то всі графіки проходять не далі, ніж на відстані Δ від точки N .

При малих λ_1 число $\Delta = \Delta(\lambda_1)$ також мале:

$$\lim_{\lambda_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta(\lambda_1)}{\lambda_1^2} = \frac{\text{ch}(0)}{4} = \frac{1}{4}.$$

Зауваження. Розглянемо $\lambda \geq \Lambda$, $\Lambda > 0$ фіксоване. Тоді

$$f_\lambda(\pi) = 1 + e^{-\lambda},$$

і графіки проходять поблизу точки $Q\left(\pi; 1 + \frac{e^{-\Lambda}}{2}\right)$.

Справді, коли $\lambda \geq \Lambda$, матимемо

$$|f_\lambda(\pi) - y_Q| \leq \frac{1}{2}e^{-\Lambda}$$

і всі графіки проходять на відстані, не більшій за $\frac{1}{2}e^{-\Lambda}$ від точки Q .

На рис. 7, 8 показано графіки сім'ї функцій $f(x) = a^{\sin x} + a^{\cos x}$ при різних a .

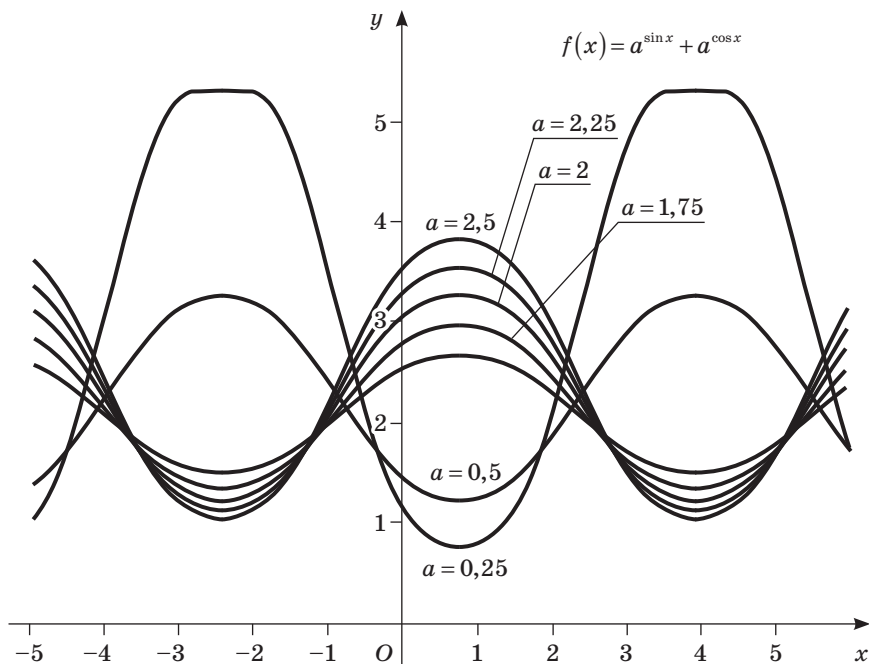


Рис. 7

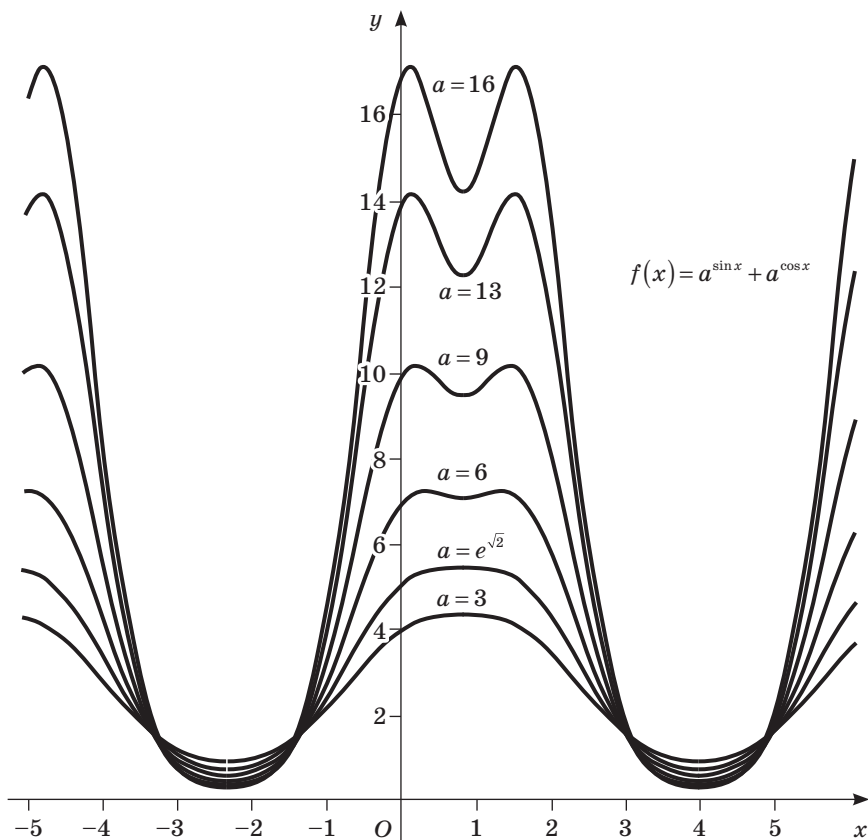


Рис. 8

ЛІТЕРАТУРА

1. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз. Т. 1. — К. : Либідь, 1993.
2. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. — М. : Наука, 1969.

§ 7. Нерівності певного виду з модулем

Задачі на доведення нерівностей часто пропонують на математичних олімпіадах школярів і студентів. Ми розглянемо нерівності виду $\sum_{k=1}^n a_k |x - \gamma_k| \geq c$, де n — фіксоване натуральне число, $a_k \neq 0$, γ_k , $k = \overline{1, n}$, c — дійсні числа, причому $\gamma_i \neq \gamma_j$ при $i \neq j$.

У цьому параграфі ми будемо частково використовувати послідовність Фібоначчі $\{F_k, k \geq 1\}$, яка задається рекурентно: $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Зокрема, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_7 = 13$.

Функція $f(x) = \sum_{k=1}^n a_k |x - \gamma_k|$, $x \in \mathbb{R}$, називається кусково-лінійною. Точки γ_k називаються кутовими точками функції. Графіком кусково-лінійної функції є ламана, яка має n вершин, координати яких $(\gamma_k, f(\gamma_k))$. Можна показати, що у випадку $\sum_{k=1}^n a_k \geq 0$ найменшого значення функція досягає в одній із кутових точок. Якщо n — невелике число, то найменше значення функції можна знайти простим перебором.

Приклад 1. Знайти найменше значення функції

$$f(x) = 2|x+2| - 3|x| + 4|x-1| + |x-4|.$$

Розв'язання

Послідовно знаходимо значення функції в кожній кутовій точці:

$$f(-2) = 12, \quad f(0) = 12, \quad f(1) = 6, \quad f(4) = 12.$$

Отже, $\min f(x) = f(1) = 6$. Очевидно, виконується нерівність

$$2|x+2| - 3|x| + 4|x-1| + |x-4| \geq 6.$$

Рівність досягається лише, коли $x = 1$.

При великому n перебір нездійснений, і потрібно шукати інші способи знаходження найменшого значення кусково-лінійної функції.

7.1. НЕРІВНОСТІ ВИДУ $\sum_{k=1}^n |x - k| \geq c$

Функція $f(x) = \sum_{k=1}^n a_k |x - \gamma_k|$ неперервна на всій числовій осі як сума скінченного числа неперервних функцій. Коли $a_k > 0$, $k = \overline{1, n}$, матимемо $f(x) \rightarrow +\infty$, якщо $x \rightarrow \pm\infty$. Отже, найменше значення функції існує.

Розглянемо найпростіший випадок:

$$f(x) = \sum_{k=1}^n |x - k| \quad (a_k = 1, \gamma_k = k, k = \overline{1, n}).$$

ЛЕМА 1. Для довільних дійсних a, b виконується нерівність

$$|x - a| + |x - b| \geq |a - b|.$$

Якщо $a < b$, то рівність досягається лише при $x \in [a; b]$.

Доведення

За нерівністю $|y + z| \leq |y| + |z|$, маємо:

$$|x - a| + |x - b| \geq |x - a + b - x| = |b - a| = |a - b|.$$

Рівність досягається лише у випадку, коли числа $x - a$ та $b - x$ одного знака або хоч одне з них дорівнює нулю, тобто коли $(x - a)(x - b) \leq 0$, звідки $a \leq x \leq b$, коли $a < b$.

Приклад 2. Нехай $\gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3$. Знайти найменше значення функції $f(x) = |x - \gamma_1| + |x - \gamma_2| + |x - \gamma_3|$.

Розв'язання

За лемою 1,

$$|x - \gamma_1| + |x - \gamma_3| \geq \gamma_3 - \gamma_1, \quad (1)$$

причому рівність досягається, коли $x \in [\gamma_1; \gamma_3]$. Крім того, $|x - \gamma_2| \geq 0$; рівність досягається лише при $x = \gamma_2$.

Тому, коли $x = \gamma_2$, функція набуває найменшого значення і

$$\min f(x) = f(\gamma_2) = \gamma_3 - \gamma_1.$$

Отже, виконується нерівність $|x - \gamma_1| + |x - \gamma_2| + |x - \gamma_3| \geq \gamma_3 - \gamma_1$.

Рівність досягається лише при $x = \gamma_2$.

Нехай тепер $f(x) = \sum_{k=1}^n |x - \gamma_k|$. Можна вважати, що

$$\gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3 < \dots < \gamma_n.$$

Помітимо, що при парному n ($n = 2m$)

$$f(x) = (|x - \gamma_1| + |x - \gamma_{2m}|) + (|x - \gamma_2| + |x - \gamma_{2m-1}|) + \dots + (|x - \gamma_m| + |x - \gamma_{m+1}|).$$

Маємо суму m пар. За лемою 1:

- ✓ $|x - \gamma_1| + |x - \gamma_{2m}| \geq \gamma_{2m} - \gamma_1$, рівність при $x \in [\gamma_1; \gamma_{2m}]$,
- ✓ $|x - \gamma_2| + |x - \gamma_{2m-1}| \geq \gamma_{2m-1} - \gamma_2$, рівність при $x \in [\gamma_2; \gamma_{2m-1}]$,
- ✓ ...
- ✓ $|x - \gamma_m| + |x - \gamma_{m+1}| \geq \gamma_{m+1} - \gamma_m$, рівність при $x \in [\gamma_m; \gamma_{m+1}]$.

Проміжки $[\gamma_1; \gamma_{2m}]$, $[\gamma_2; \gamma_{2m-1}]$, ..., $[\gamma_m; \gamma_{m+1}]$ утворює систему вкладених проміжків, тобто

$$[\gamma_1; \gamma_{2m}] \supset [\gamma_2; \gamma_{2m-1}] \supset \dots \supset [\gamma_m; \gamma_{m+1}].$$

Тому $\min f(x) = f(x_0)$, де $x_0 \in [\gamma_m; \gamma_{m+1}]$.

Очевидно,

$$\min f(x) = (\gamma_n - \gamma_1) + (\gamma_{n-1} - \gamma_2) + \dots + \left(\gamma_{\frac{n}{2}+1} - \gamma_{\frac{n}{2}} \right), \quad (2)$$

тобто найменше значення функції дорівнює сумі довжин усіх вкладених проміжків.

Коли n непарне ($n = 2m - 1$), то є «середня» кутова точка γ_m .

Тоді

$$f(x) = (|x - \gamma_1| + |x - \gamma_{2m-1}|) + (|x - \gamma_{2m-2}| + |x - \gamma_{m-1}|) + \dots + (|x - \gamma_{m-1}| + |x - \gamma_{m+1}|) + |x - \gamma_m|.$$

Маємо $m - 1$ пару і ще доданок $|x - \gamma_m|$.

За лемою 1:

- ✓ $|x - \gamma_1| + |x - \gamma_{2m-1}| \geq \gamma_{2m-1} - \gamma_1$, рівність при $x \in [\gamma_1; \gamma_{2m-1}]$,
- ✓ $(|x - \gamma_2| + |x - \gamma_{2m-2}|) \geq \gamma_{2m-2} - \gamma_2$, рівність при $x \in [\gamma_1; \gamma_{2m-2}]$,
- ✓ ...
- ✓ $|x - \gamma_{m-1}| + |x - \gamma_{m+1}| \geq \gamma_{m+1} - \gamma_{m-1}$, рівність при $x \in [\gamma_{m-1}; \gamma_{m+1}]$.

Ми бачимо, що коли $x = \gamma_m$, то в усіх нерівностях досягаються рівності і $|x - \gamma_m| = 0$.

Отже,

$$\min f(x) = f(\gamma_m) = (\gamma_{2m-1} - \gamma_1) + (\gamma_{2m-2} - \gamma_2) + \dots + (\gamma_{m+1} - \gamma_{m-1}). \quad (3)$$

В обох випадках $x_{\min} = \gamma_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$, (тут і нижче $[a]$ — ціла частина числа a).

Справді, коли $n = 2m - 1$, то $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{2m-1}{2} \right\rfloor + 1 = m$, а коли $n = 2m$, то найменшого значення функція $f(x) = \sum_{k=1}^n |x - \gamma_k|$ досягає в кожній точці проміжку $[\gamma_m; \gamma_{m+1}]$, зокрема в точці γ_{m+1} , $m+1 = \left\lfloor \frac{\gamma_n}{2} \right\rfloor + 1$.

Приклад 3. Довести нерівність $\sum_{k=1}^{2m-1} |x - k| \geq m(m-1)$.

Доведення

Згідно з (3), маємо:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^{2m-1} |x - k| \geq \overbrace{(2m-1-1) + (2m-2-2) + \dots + (m+1-(m-1))}^{m-1 \text{ дужка}} = \\ &= 2 + 4 + \dots + (2m-2) = \frac{(2m-2+2)(m-1)}{2} = m(m-1). \end{aligned}$$

Приклад 4. Довести нерівність $\sum_{k=1}^{2m} |x - k| \geq m^2$.

Доведення

Згідно з (2), маємо:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2m} |x - k| &\geq (2m-1) + (2m-1-2) + (2m-1-3) + \dots + (m+1-m) = \\ &= 1 + 2 + \dots + (2m-1) = \frac{2m-1+1}{2} \cdot m = m^2. \end{aligned}$$

На основі прикладів 3 і 4 доходимо висновку, що справджується нерівність $\sum_{k=1}^n |x - k| \geq \frac{1}{4} \left(n^2 - \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2} \right)$, бо

$$\min \sum_{k=1}^n |x - k| = \begin{cases} \frac{n^2}{4}, & n = 2m, \\ \frac{n^2 - 1}{4}, & n = 2m - 1, m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

7.2. НЕРІВНОСТІ ВИДУ $\sum_{k=1}^n |x - \gamma_k| \geq c$

ТЕОРЕМА 1. Нехай $\{\gamma_k, k \geq 1\}$ — зростаюча послідовність. Має місце нерівність

$$\sum_{k=1}^n |x - \gamma_k| \geq \sum_{k=1}^n \gamma_k - 2 \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]+1} \gamma_k + \frac{1 - (-1)^n}{2} \cdot \gamma_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}. \quad (4)$$

Рівність досягається при $x = \gamma_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$.

Доведення

Розглянемо два випадки.

1. $n = 2m - 1$. «Середня» точка γ_m є точкою мінімуму функції

$$f(x) = \sum_{k=1}^{2m-1} |x - \gamma_k|. \text{ Це впливає з тотожності}$$

$$\begin{aligned} f(x) = & (|x - \gamma_{2m-1}| + |x - \gamma_1|) + (|x - \gamma_{2m-2}| + |x - \gamma_2|) + \dots + \\ & + (|x - \gamma_{m+1}| + |x - \gamma_{m+1}|) + |x - \gamma_m|. \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} \min f(x) = f(\gamma_m) = & |\gamma_m - \gamma_1| + |\gamma_m - \gamma_2| + \dots + |\gamma_m - \gamma_{m-1}| + |\gamma_m - \gamma_m| + \\ & + |\gamma_m - \gamma_{m+1}| + |\gamma_m - \gamma_{m+2}| + \dots + |\gamma_m - \gamma_{2m-1}| = \\ = & (\gamma_m - \gamma_1) + (\gamma_m - \gamma_2) + \dots + (\gamma_m - \gamma_{m-1}) + (\gamma_m - \gamma_m) + \\ & + (\gamma_{m+1} - \gamma_m) + (\gamma_{m+2} - \gamma_m) + \dots + (\gamma_{2m-1} - \gamma_m) = \\ = & m\gamma_m - \sum_{k=m+1}^{2m-1} \gamma_k - m\gamma_m = \sum_{k=1}^{2m-1} \gamma_k - 2 \sum_{l=1}^m \gamma_k + \gamma_m. \end{aligned} \quad (5)$$

2. $n = 2m$. Має місце тотожності

$$\begin{aligned} f(x) = & \sum_{k=1}^{2m} |x - \gamma_k| = (|x - \gamma_{2m}| + |x - \gamma_1|) + \\ & + (|x - \gamma_{2m-1}| + |x - \gamma_2|) + \dots + (|x - \gamma_{m+1}| + |x - \gamma_m|). \end{aligned}$$

Ураховуючи лему 1, маємо:

$$\begin{aligned} f(x) \geq & \gamma_{2m} - \gamma_1 + \gamma_{2m-1} - \gamma_2 + \dots + \gamma_{m+1} - \gamma_m = \\ = & \sum_{k=m+1}^{2m} \gamma_k - \sum_{k=1}^m \gamma_k = \sum_{k=1}^{2m} \gamma_k - 2 \sum_{k=1}^m \gamma_k. \end{aligned} \quad (6)$$

Із нерівностей (5) і (6) випливає нерівність (4). Рівність у (6) досягається в будь-якій точці проміжку $[\gamma_m; \gamma_{m+1}]$, зокрема у точці $\gamma_{m+1} = \gamma_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$.

Приклади 3 і 4 є окремими випадками (4) при $\gamma_k = k$.

Приклад 5. Довести нерівність $\sum_{k=1}^{2m} |x - k^2| \geq m^2(2m+1)$.

Доведення

Згідно з (6), маємо:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2m} |x - k^2| &= \sum_{k=1}^{2m} k^2 - 2 \sum_{k=1}^m k^2 = \frac{1}{6} \cdot 2m(2m+1)(4m+1) - \\ &- 2 \cdot \frac{1}{6} m(m+1)(2m+1) = m^2(2m+1). \end{aligned}$$

Рівність досягається в кожній точці проміжку $[m; m+1]$.

Вправа 1. Довести нерівність $\sum_{k=1}^{2m-1} |x - k^2| \geq 2m^2(m-1)$.

Приклад 6. Довести нерівність $\sum_{k=1}^{2m-1} |x - k^3| \geq \frac{1}{2} m^2(m-1)(7m-1)$.

Доведення

Згідно з (5), маємо:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2m-1} |x - k^3| &\geq \sum_{k=1}^{2m-1} k^3 - 2 \sum_{k=1}^m k^3 + m^3 = \\ &= \left(\frac{(2m-1)(2m)}{2} \right)^2 - 2 \left(\frac{m(m+1)}{2} \right)^2 + m^3 = \\ &= m^2(2m-1)^2 - \frac{m^2(m+1)^2}{2} + m^3 = \\ &= \frac{1}{2} m^2(7m^2 - 8m + 1) = \frac{1}{2} m^2(m-1)(7m-1). \end{aligned}$$

Вправа 2. Довести нерівність $\sum_{k=1}^{2m} |x - k^3| \geq \frac{1}{2} m^2(7m^2 + 6m + 1)$.

Приклад 7. Довести нерівність $\sum_{k=1}^{2p-1} |x - \ln k| \geq \ln \frac{p(2p-1)!}{(p!)^2}$.

Доведення

Оскільки послідовність $\{\ln k, k \geq 1\}$ зростаюча, то згідно з (5) маємо:

$$\sum_{k=1}^{2p-1} |x - \ln k| \geq \sum_{k=1}^{2p-1} \ln k - 2 \sum_{k=1}^p \ln k + \ln p = \ln \frac{p(2p-1)!}{(p!)^2}.$$

Рівність досягається, лише коли $x = \ln p$.

Вправа 3. Довести нерівність $\sum_{k=1}^{2p} |x - \ln k| \geq \ln \frac{(2p)!}{(p!)^2}$.

Приклад 8. $\{F_k, k \geq 1\}$ — послідовність Фібоначчі. Довести нерівність $\sum_{k=1}^{2p} |x - F_k| \geq F_{2p+2} - 2F_{p+2} + 1$.

Доведення

За лемою, наведеною в [1], с. 11, маємо:

$$\sum_{k=1}^n F_k = F_{n+2} - 1, \quad n \geq 1.$$

(Це нескладно довести за індукцією.)

Оскільки послідовність Фібоначчі зростаюча, то згідно з (6) матимемо:

$$\sum_{k=1}^{2p} |x - F_k| \geq \sum_{k=1}^{2p} F_k - 2 \sum_{k=1}^p F_k = F_{2p+2} - 1 - 2(F_{p+2} - 1) = F_{2p+2} - 2F_{p+2} + 1.$$

Рівність можлива, лише коли $x \in [F_p; F_{p+1}]$.

Вправа 4. Довести нерівність

$$\sum_{k=1}^{2p-1} |x - F_k| \geq F_{2p+1} - 2F_{p+2} + F_p + 1.$$

Вправа 5. Розв'язати рівняння:

- 1) $|x - 1^2| + |x - 2^2| + \dots + |x - 100^2| = 252500$;
- 2) $|x - 1^2| + |x - 2^2| + \dots + |x - 25^2| = 4056$;
- 3) $|x - 1^3| + |x - 2^3| + \dots + |x - 20^3| = 38050$;
- 4) $|x - 1 \cdot 2| + |x - 2 \cdot 3| + \dots + |x - 19 \cdot 20| = 1890$;
- 5) $|x - \ln 1| + |x - \ln 2| + \dots + |x - \ln 21| = \ln \frac{11 \cdot 21!}{(11!)^2}$.

Відповідь. 1) $x \in [50^2; 51^2]$; 2) $x = 169$; 3) $x \in [10^3; 11^3]$;

4) $x = 110$; 5) $x = \ln 11$.

Приклад 9. Довести нерівність

$$\sum_{k=1}^{2n} \left| x - \sin \frac{k\pi}{4n} \right| \geq \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\pi(2n+1)}{8n} - \sqrt{2-\sqrt{2}} \sin \frac{\pi(n+1)}{8n}}{\sin \frac{\pi}{8n}}.$$

Доведення

Послідовність $\left\{ \sin \frac{k\pi}{4n}, k = \overline{1, 2n} \right\}$ зростаюча. Згідно з (6), маємо:

$$\sum_{k=1}^{2n} \left| x - \sin \frac{k\pi}{4n} \right| \geq \sum_{k=1}^{2n} \sin \frac{k\pi}{4n} - 2 \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{4n}. \quad (7)$$

Скористаємось формулою

$$\sum_{k=1}^n \sin k\alpha = \frac{\sin \frac{n+1}{2}\alpha \cdot \sin \frac{\pi}{2}\alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Тоді (7) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n} \left| x - \sin \frac{k\pi}{4n} \right| &\geq \frac{\sin \frac{(2n+1)\pi}{8n} \cdot \sin \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{8n}} - 2 \frac{\sin \frac{(n+1)\pi}{8n} \cdot \sin \frac{\pi}{8}}{\sin \frac{\pi}{8n}} = \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{(2n+1)\pi}{8n} - \sqrt{2-\sqrt{2}} \sin \frac{(n+1)\pi}{8n}}{\sin \frac{\pi}{8n}}. \end{aligned}$$

Приклад 10. $\{a_k, k \geq 1\}$ — арифметична прогресія з різницею $d > 0$. Довести нерівність $\sum_{k=1}^{2m} |x - a_k| \geq dm^2$.

Доведення

Оскільки $d > 0$, то задана арифметична прогресія зростаюча. Згідно з (6):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2m} |x - a_k| &\geq \sum_{k=1}^{2m} a_k - 2 \sum_{k=1}^m a_k = \frac{a_1 + a_{2m}}{2} \cdot 2m - 2 \cdot \frac{a_1 + a_m}{2} m = \\ &= (a_1 + a_{2m})m - (a_1 + a_m)m = m(a_{2m} - a_m) = m \cdot md = dm^2. \end{aligned}$$

(Коли $d = 1$ і $a_1 = 1$, матимемо приклад 4.)

Вправа 6. $\{a_k, k \geq 1\}$ — арифметична прогресія з різницею $d > 0$.

Довести нерівність $\sum_{k=1}^{2m-1} |x - a_k| \geq dm(m-1)$.

Вправа 7. Розв'язати рівняння:

1) $|x-3| + |x-6| + \dots + |x-30| = 75$;

2) $|x-2| + |x-4| + |x-6| + \dots + |x-198| = 4900$.

Відповідь. 1) $x \in [15; 18]$; 2) $x = 100$.

Вправа 8. Нехай $p = \min_{k=1}^{2m} |x - a^2 k|$, де $a \in \mathbb{N}$. Довести, що p — точний квадрат.

Вправа 9. При яких значеннях параметра p рівняння

$$|x-2| + |x-5| + |x-8| + \dots + |x-32| = p$$

має хоча б один розв'язок?

Відповідь. $p \geq 90$.

Вправа 10. При яких значеннях параметра p нерівність

$$|x-3| + |x-7| + |x-11| + \dots + |x-39| < p$$

не має розв'язків?

Відповідь. $p \leq 100$.

Приклад 11. Довести нерівність

$$\sum_{k=1}^{2m} |x - q^{k-1}| \geq \frac{(q^m - 1)^2}{q - 1}, \text{ де } q > 1.$$

Доведення

Нехай $\{a_k = q^{k-1}, k \geq 1\}$ — геометрична прогресія зі знаменником $q > 1$. Згідно з (6), маємо:

$$\sum_{k=1}^{2m} |x - q^{k-1}| \geq \sum_{k=1}^{2m} q^{k-1} - 2 \sum_{k=1}^m q^{k-1} = \frac{q^{2m} - 1}{q - 1} - 2 \frac{q^m - 1}{q - 1} = \frac{(q^m - 1)^2}{q - 1}.$$

Вправа 12. Довести нерівність

$$\sum_{k=1}^{2m-1} |x - q^{k-1}| \geq \frac{(q^m - 1)(q^{m-1} - 1)}{q - 1}, \text{ де } q > 1.$$

Приклад 12. Довести нерівність

$$\sum_{k=1}^{2m} |x - k \cdot k!| \geq (2m+1)! - 2(m+1)! + 1.$$

Доведення

Згідно з (6), маємо:

$$\sum_{k=1}^{2m} |x - k \cdot k!| \geq \sum_{k=1}^{2m} k \cdot k! - 2 \sum_{k=1}^m k \cdot k! \quad (8)$$

Доведіть самостійно, використовуючи рівність $k \cdot k! = (k+1)! - k!$,

що $\sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1$. Перетворивши (8), матимемо:

$$\sum_{k=1}^{2m} |x - k \cdot k!| \geq (2m+1)! - 1 - 2((m+1)! - 1) = (2m+1)! - 2(m+1)! + 1.$$

Вправа 12. Довести нерівність

$$\sum_{k=1}^{2m-1} |x - k \cdot k!| \geq (2m)! - (m+2) \cdot m! + 1.$$

Вправа 13. Розв'язати рівняння:

- 1) $|x - 1 \cdot 1!| + |x - 2 \cdot 2!| + \dots + |x - 50 \cdot 50!| = 51! - 2 \cdot 26! + 1$;
- 2) $|x - 1 \cdot 1!| + |x - 2 \cdot 2!| + \dots + |x - 19 \cdot 19!| = 20! - 12 \cdot 10! + 1$.

Відповідь. 1) $x \in [25 \cdot 25!; 26 \cdot 26!]$; 2) $x = 10$.

Приклад 13. Довести нерівність $\sum_{k=1}^{2m} |x - F_k^2| \geq F_{2m} \cdot F_{2m+1} - 2F_m \cdot F_{m+1}$,

де $\{F_k, k \geq 1\}$ — послідовність Фібоначчі.

Доведення

Доведемо за допомогою методу математичної індукції, що

$$\sum_{k=1}^n F_k^2 = F_n \cdot F_{n+1}. \quad (9)$$

1°. Якщо $n=1$, то $F_1^2 = F_1 \cdot F_2$ або $1^2 = 1 \cdot 1$, що справедливо.

2°. Нехай $\sum_{k=1}^n F_k^2 = F_n \cdot F_{n+1}$ при деякому $n \geq 1$. Тоді, використовуючи припущення, матимемо:

$$\sum_{k=1}^{n+1} F_k^2 = \sum_{k=1}^n F_k^2 + F_{n+1}^2 = F_n \cdot F_{n+1} + F_{n+1}^2 = F_{n+1} (F_n + F_{n+1}) = F_{n+1} \cdot F_{n+2}.$$

Згідно з (6) і (9) матимемо:

$$\sum_{k=1}^{2m} |x - F_k^2| \geq \sum_{k=1}^{2m} F_k^2 - 2 \sum_{k=1}^m F_k^2 = F_{2m} \cdot F_{2m+1} - 2F_m \cdot F_{m+1}.$$

Зауважимо, що рівність досягається при $x \in [F_m^2; F_{m+1}^2]$.

Вправа 14. Довести нерівність

$$\sum_{k=1}^{2m-1} |x - F_k^2| \geq F_{2m-1} \cdot F_{2m} - 2F_m \cdot F_{m+1} + F_m.$$

Приклад 14. Послідовність задано рекурентно: $u_1 = 2$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$, $n \geq 1$. Довести, що $\sum_{k=1}^{2m} |x - u_k| \geq 3(2^m - 1)^2$.

Доведення

Помітимо, що

$$u_1 = 3 \cdot 2^{1-1} - 1 = 2, \quad u_2 = 3 \cdot 2^{2-1} - 1 = 5, \quad u_3 = 3 \cdot 2^{3-1} - 1 = 11.$$

Висуваємо гіпотезу, що $u_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$. Доведемо її за індукцією.

1°. При $n = 1$ ми вже цю рівність перевірили.

2°. Нехай $u_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$, $n \geq 1$ фіксоване. Тоді

$$u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2(3 \cdot 2^{n-1} - 1) + 1 = 3 \cdot 2^n - 1,$$

що завершує індуктивне доведення.

Далі матимемо:

$$\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n (3 \cdot 2^{k-1} - 1) = 3 \sum_{k=1}^n 2^{k-1} - n = 3(2^n - 1) - n = 3 \cdot 2^n - n - 3.$$

Оскільки послідовність $\{u_k, k \geq 1\}$ зростаюча, то згідно з (6), маємо:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2m} |x - u_k| &\geq \sum_{k=1}^{2m} u_k - 2 \sum_{k=1}^m u_k = \\ &= 3 \cdot 2^{2m} - 2m - 3 - 2(3 \cdot 2^m - m - 3) = 3 \cdot 2^{2m} - 6 \cdot 2^m + 3 = 3(2^m - 1)^2. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2. Нехай $\{\gamma_k, k \geq 1\}$ — спадна послідовність. Має місце нерівність

$$\sum_{k=1}^n |x - \gamma_k| \geq 2 \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]+1} \gamma_k - 2 \sum_{k=1}^n \gamma_k - \frac{1 - (-1)^n}{2} \gamma_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}. \quad (10)$$

Рівність досягається, коли $x = \gamma_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$.

Доведення аналогічне доведенню теореми 1, причому:

$$\checkmark \sum_{k=1}^{2m-1} |x - \gamma_k| \geq 2 \sum_{k=1}^m \gamma_k - 2 \sum_{k=1}^{2m-1} \gamma_k - \gamma_m, \text{ рівність лише при } x = \gamma_m; \quad (11)$$

$$\checkmark \sum_{k=1}^{2m} |x - \gamma_k| \geq 2 \sum_{k=1}^m \gamma_k - \sum_{k=1}^{2m} \gamma_k, \text{ рівність лише при } x \in [\gamma_{m+1}, \gamma_m]. \quad (12)$$

Приклад 15. Довести нерівність

$$\sum_{k=1}^{2m} \left| x - \frac{1}{k(k+1)} \right| \geq \frac{2m^2}{(m+1)(2m+1)}.$$

Доведення

Послідовність $\left\{ \frac{1}{k(k+1)}; k \geq 1 \right\}$ спадна. Згідно з (12), маємо:

$$\sum_{k=1}^{2m} \left| x - \frac{1}{k(k+1)} \right| \geq 2 \sum_{k=1}^m \frac{1}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^{2m} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Помітимо, що

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

$$\text{Отже, } \sum_{k=1}^{2m} \left| x - \frac{1}{k(k+1)} \right| \geq 2 \frac{m}{m+1} - \frac{2m}{2m+1} = \frac{2m^2}{(m+1)(2m+1)}.$$

$$\text{Рівність досягається, коли } x \in \left[\frac{1}{(m+1)(m+2)}; \frac{1}{m(m+1)} \right].$$

Вправа 15. Довести нерівність

$$\sum_{k=1}^{2m-1} \left| x - \frac{1}{k(k+1)} \right| \geq \frac{(m-1)(2m+1)}{2m(m+1)}.$$

Вправа 16. Розв'язати рівняння:

$$1) \left| x - \frac{1}{1 \cdot 2} \right| + \left| x - \frac{1}{2 \cdot 3} \right| + \dots + \left| x - \frac{1}{19 \cdot 20} \right| = \frac{189}{220};$$

$$2) \left| x - \frac{1}{1 \cdot 2} \right| + \left| x - \frac{1}{2 \cdot 3} \right| + \dots + \left| x - \frac{1}{20 \cdot 21} \right| = \frac{200}{231}.$$

$$\text{Відповідь. 1) } x = \frac{1}{110}; 2) x \in \left[\frac{1}{132}; \frac{1}{110} \right].$$

Приклад 16. Довести нерівність

$$\left|x - \frac{1}{1}\right| + \left|x - \frac{1}{1+2}\right| + \left|x - \frac{1}{1+2+3}\right| + \dots + \left|x - \frac{1}{1+2+\dots+2m}\right| \geq \frac{4m^2}{(m+1)(2m+1)}.$$

Доведення

Розглянемо послідовність, яка має загальний член

$$a_k = \frac{1}{1+2+\dots+k}, \quad k \geq 1.$$

Ця послідовність спадна. Згідно з (12), маємо:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2m} a_k &= 2 \sum_{k=1}^m \frac{1}{1+2+\dots+k} - \sum_{n=1}^{2m} \frac{1}{1+2+\dots+k} = \\ &= 2 \sum_{k=1}^m \frac{2}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^{2m} \frac{2}{k(k+1)} = 4 \frac{m}{m+1} - 2 \frac{2m}{2m+1} = \frac{4m^2}{(m+1)(2m+1)}. \end{aligned}$$

Рівність досягається, коли $x \in \left[\frac{2}{(m+1)(m+2)}; \frac{2}{m(m+1)} \right]$.

Приклад 17. Довести нерівність

$$\sum_{k=1}^{2m-1} \left| x - \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} \right| \geq \sqrt{m+1} - \sqrt{2m} + \sqrt{m} - 1.$$

Доведення

Помітимо, що $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \sqrt{n+1} - 1$.

Оскільки послідовність $\gamma_k = \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$ спадна, то згідно з (11),

маємо:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{2m} \left| x - \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} \right| \geq \\ &\geq 2 \sum_{k=1}^m \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} - \sum_{k=1}^{2m-1} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{m} + \sqrt{m+1}} = \\ &= 2(\sqrt{m+1} - 1) - (\sqrt{2m} - 1) - (\sqrt{m+1} - \sqrt{m}) = \\ &= \sqrt{m+1} - \sqrt{2m} + \sqrt{m} - 1. \end{aligned}$$

Рівність досягається, коли $x = \sqrt{m+1} - \sqrt{m}$.

Вправа 17. Довести нерівність

$$\sum_{k=1}^{2m} \left| x - \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} \right| \geq 2\sqrt{m+1} - \sqrt{2m+1} - 1.$$

Вправа 18. Розв'язати рівняння

$$\left| x - \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} \right| + \left| x - \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \right| + \dots + \left| x - \frac{1}{\sqrt{48} + \sqrt{49}} \right| = 2.$$

Відповідь. $x \in [\sqrt{26} - 5; 5 - 2\sqrt{6}]$.

Приклад 18. Довести нерівність

$$\sum_{k=1}^{2m} \left| x - \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \right| \geq \frac{4m^2}{(4m+1)(2m+1)}.$$

Доведення

Помітимо, що

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1}.$$

Оскільки послідовність $\gamma_k = \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ спадна, то згідно

з (12), маємо:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{2m} \left| x - \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \right| \geq \\ & \geq 2 \sum_{k=1}^m \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} - \sum_{k=1}^{2m} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \\ & = 2 \cdot \frac{m}{2m+1} - \frac{2m}{4m+1} = \frac{4m^2}{(m+1)(2m+1)}. \end{aligned}$$

Рівність досягається, коли $x \in \left[\frac{1}{(2m+1)(2m+3)}; \frac{1}{(2m-1)(2m+1)} \right]$.

Вправа 19. Нехай $t_m = \min \sum_{k=1}^{2m} \left| x - \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \right|$. Знайти $\lim_{m \rightarrow \infty} t_m$.

Відповідь. 0,5.

Вправа 20. Довести нерівність

$$\sum_{k=1}^{2m-1} \left| x - \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \right| \geq \frac{8m^2}{(2m-1)(2m+1)(4m-1)}.$$

Вправа 21. Розв'язати рівняння:

$$1) \left| x - \frac{1}{1 \cdot 3} \right| + \left| x - \frac{1}{3 \cdot 5} \right| + \dots + \left| x - \frac{1}{19 \cdot 21} \right| = \frac{100}{231};$$

$$2) \left| x - \frac{1}{1 \cdot 3} \right| + \left| x - \frac{1}{3 \cdot 5} \right| + \dots + \left| x - \frac{1}{17 \cdot 19} \right| = \frac{800}{1881}.$$

Відповідь. 1) $x \in \left[\frac{1}{143}; \frac{1}{99} \right]$; 2) $x = \frac{1}{99}$.

Приклад 19. Довести нерівність

$$\sum_{k=1}^{2m} \left| x - \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \right| \geq \frac{m^2(2m+7)}{4(m+1)(m+2)(2m+1)}.$$

Доведення

Має місце рівність $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ (доведіть її

самостійно). Оскільки послідовність $\gamma_k = \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ спадна, то згідно з (12) маємо:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{2m} \left| x - \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \right| \geq \\ & \geq 2 \sum_{k=1}^m \frac{1}{k(k+1)(k+2)} - \sum_{k=1}^{2m} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \\ & = 2 \frac{m(m+3)}{4(m+1)(m+2)} - \frac{2m(2m+3)}{4(2m+1)(2m+2)} = \\ & = \frac{m^2(2m+7)}{4(m+1)(m+2)(2m+1)}. \end{aligned}$$

Рівність досягається, коли

$$x \in \left[\frac{1}{(m+1)(m+2)(m+3)}; \frac{1}{m(m+1)(m+2)} \right].$$

Вправа 22. Розв'язати нерівність

$$\left| x - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right| + \left| x - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \right| + \dots + \left| x - \frac{1}{8 \cdot 9 \cdot 10} \right| \geq \frac{2}{9}.$$

Відповідь. $x \in \mathbb{R}$.

Вправа 23. Довести нерівність

$$\sum_{k=1}^{2m-1} \left| x - \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \right| \geq \frac{(m^2-1)(2m^2+7m+2)}{4m(m+1)(m+2)(2m+1)}.$$

Приклад 20. Довести нерівність

$$\sum_{k=1}^{2m} \left| x - \frac{k}{2^k} \right| \geq 2 - \frac{(m+2)2^m - (m+1)}{2^{2m-1}}.$$

Доведення

Має місце рівність $\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ (доведіть її самостійно).

Згідно з (12) маємо:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2m} \left| x - \frac{k}{2^k} \right| &\geq 2 \sum_{k=1}^m \frac{k}{2^k} - \sum_{k=1}^{2m} \frac{k}{2^k} = \\ &= 2 \left(2 - \frac{m+2}{2^m} \right) - \left(2 - \frac{2m+2}{2^{2m}} \right) = \\ &= 2 - \frac{(m+2)2^m - (m+1)}{2^{2m-1}}. \end{aligned}$$

Рівність досягається, коли $x \in \left[\frac{m+1}{2^{m+1}}; \frac{m}{2^m} \right]$.

Зауваження. Оскільки $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}$ для послідовності $\gamma_k = \frac{k}{2^k}$, то ця послідовність не є спадною. Але вона є не зростаючою, тобто $\gamma_{k+1} \leq \gamma_k$, $k \geq 1$. Тому для неї нерівність (12) справедлива.

Вправа 24. Довести нерівність $\sum_{k=1}^{2m-1} \left| x - \frac{k}{2^k} \right| \geq 2 - \frac{3m+4}{2^m} + \frac{4m+2}{2^{2m}}.$

Вправа 25. Розв'язати рівняння:

$$1) \left| x - \frac{1}{2^1} \right| + \left| x - \frac{2}{2^2} \right| + \left| x - \frac{3}{2^3} \right| + \dots + \left| x - \frac{10}{2^{10}} \right| = 1 \frac{147}{256};$$

$$2) \left| x - \frac{1}{2^1} \right| + \left| x - \frac{2}{2^2} \right| + \left| x - \frac{3}{2^3} \right| + \dots + \left| x - \frac{9}{2^9} \right| = 1 \frac{219}{512}.$$

Відповідь. 1) $x \in \left[\frac{3}{32}; \frac{5}{32} \right]$; 2) $x = \frac{5}{32}$.

Приклад 21. Довести нерівність

$$\sum_{k=1}^{2n} \left| x - \cos \frac{k\pi}{4n} \right| \geq \frac{2 \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi(n+1)}{8n} - \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi(2n+1)}{8n}}{\sin \frac{\pi}{8n}}.$$

Доведення

Послідовність $\gamma_k = \cos \frac{k\pi}{4n}$ спадна ($k=1, 2, \dots, 2n$). Згідно з (12),

$$\text{матимемо } \sum_{k=1}^{2n} \left| x - \cos \frac{k\pi}{4n} \right| \geq 2 \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi}{4n} - \sum_{k=1}^{2n} \cos \frac{k\pi}{2n}.$$

Використаємо рівність

$$\sum_{k=1}^n \cos k\alpha = \frac{\cos \frac{n+1}{2}\alpha \cdot \sin \frac{n}{4}\alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}},$$

$\alpha \neq 2\pi t$, $t \in \mathbb{Z}$ (доведіть її самостійно).

Тепер маємо:

$$\sum_{k=1}^{2n} \left| x - \cos \frac{k\pi}{4n} \right| \geq 2 \frac{\sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi(n+1)}{8n}}{\sin \frac{\pi}{8n}} - \frac{\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi(2n+1)}{8n}}{\sin \frac{\pi}{8n}}.$$

Рівність досягається, коли $x \in \left[\cos \frac{\pi(n+1)}{4n}; \cos \frac{\pi}{4} \right]$.

Приклад 22. Довести нерівність

$$\sum_{k=1}^{2m} \left| x - \frac{k}{(k+1)!} \right| \geq 1 - \frac{2}{(m+1)!} + \frac{1}{(2m+1)!}.$$

Доведення

Послідовність $\gamma_k = \frac{k}{(k+1)!}$ спадна. Справді,

$$\gamma_k > \gamma_{k+1} \Leftrightarrow \frac{k}{(k+1)!} > \frac{k+1}{(k+2)!} \Leftrightarrow k(k+2) > k+1,$$

що правильно, коли $k \in \mathbb{N}$.

Згідно з (12), маємо:

$$\sum_{k=1}^{2m} \left| x - \frac{k}{(k+1)!} \right| \geq 2 \sum_{k=1}^m \frac{k}{(k+1)!} - \sum_{k=1}^{2m} \frac{k}{(k+1)!}.$$

Має місце рівність $\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$ (доведіть її самостійно).

Отже,

$$\sum_{k=1}^{2m} \left| x - \frac{k}{(k+1)!} \right| \geq 2 \left(1 - \frac{1}{(m+1)!} \right) - \left(1 - \frac{1}{(2m+1)!} \right) = 1 - \frac{2}{(m+1)!} + \frac{1}{(2m+1)!}.$$

Вправа 26. Довести нерівність $\sum_{k=1}^{2m-1} \left| x - \frac{k}{(k+1)!} \right| \geq 1 - \frac{m+2}{(m+1)!} + \frac{1}{(2m)!}.$

Вправа 27. Нехай $t_n = \min \sum_{k=1}^n \left| x - \frac{1}{(k+1)!} \right|$. Знайти $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n$.

Відповідь. 1.

7.3. НЕРІВНОСТІ ВИДУ $\sum_{k=1}^n a_k |x - \gamma_k| \geq c$, ДЕ $a_k > 0$

Далі розглянемо випадок функції

$$f(x) = \sum_{k=1}^n a_k |x - \gamma_k|,$$

коли не всі a_k дорівнюють одиниці (вважатимемо, що $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_n$). Покажемо на прикладі алгоритм пошуку найменшого значення $f(x)$.

Нехай

$$f(x) = 1,3|x-1| + 4,2|x-1,8| + 3,2|x-2,7| + 6,1|x-3| + 8|x-4,2|.$$

1-й крок

$$f(x) = 1,3(|x-1| + |x-4,2|) + 4,2|x-1,8| + 3,2|x-2,7| + 6,1|x-3| + 6,7|x-4,2|.$$

У цьому випадку: $a_1 = 1,3$; $a_2 = 4,2$; $a_3 = 3,2$; $a_4 = 6,1$; $a_5 = 8$; $\gamma_1 = 1$; $\gamma_2 = 1,8$; $\gamma_3 = 2,7$; $\gamma_4 = 3$; $\gamma_5 = 4,2$.

На першому кроці утворюємо суму $b_1(|x - \gamma_1| + |x - \gamma_5|)$, де $b_1 = \min\{a_1; a_5\}$.

2-й крок

$$f(x) = 1,3(|x-1| + |x-4,2|) + 4,2(|x-1,8| + |x-4,2|) + 3,2|x-2,7| + 6,1|x-3| + 2,5|x-4,2|.$$

3-й крок

$$f(x) = 1,3(|x-1|+|x-4,2|) + 4,2(|x-1,8|+|x-4,2|) + \\ + 2,5(|x-2,7|+|x-4,2|) + 0,7|x-2,7| + 6,1|x-3|.$$

4-й крок

$$f(x) = 1,3(|x-1|+|x-4,2|) + 4,2(|x-1,8|+|x-4,2|) + \\ + 2,5(|x-2,7|+|x-4,2|) + 0,7(|x-2,7|+|x-3|) + 5,4|x-3|.$$

За лемою 1 маємо:

$$\min f(x) = f(3) = 1,3(4,2-1) + 4,2(4,2-1,8) + \\ + 2,5(4,2-2,7) + 0,7(3-2,7) = 18,2.$$

Отже, доведено нерівність $f(x) \geq 18,2$.

Рівність досягається, коли $x = 3$.

Приклад 23. Довести нерівність

$$10|x-1| + 9|x-2| + 5|x-3| + 4|x-4| + 8|x-5| + 3|x-6| + 4|x-7| \geq 74.$$

Доведення

Позначимо ліву частину нерівності через $f(x)$, матимемо:

$$f(x) = 4(|x-1|+|x-7|) + 3(|x-1|+|x-6|) + 3(|x-1|+|x-5|) + \\ + 5(|x-2|+|x-5|) + 4(|x-2|+|x-4|) + 5|x-3|.$$

Отже,

$$\min f(x) = f(3) = 4(7-1) + 3(6-1) + 3(5-1) + 5(5-2) + 4(4-2) = 74.$$

Рівність досягається, коли $x = 3$.

Вправа 28. Довести нерівність

$$1|x-1| + 2|x-2| + 3|x-3| + \dots + 10|x-10| \geq 112.$$

За великої кількості доданків розглянутий алгоритм пошуку мінімуму функції досить громіздкий.

ТЕОРЕМА 3. Нехай $f(x) = \sum_{k=1}^n a_k |x - \gamma_k|$, де $a_k > 0$, $\gamma_k \in \mathbb{R}$. Якщо се-

ред коефіцієнтів a_k існує такий коефіцієнт a_p , що

$$a_p \geq a_1 + a_2 + \dots + a_{p-1} + a_{p+1} + \dots + a_n$$

(тобто a_p не менше від суми всіх інших коефіцієнтів), то

$$\min f(x) = f(\gamma_p).$$

Доведення

Розглянемо рівність

$$\begin{aligned} f(x) = & a_1(|x - \gamma_1| + |x - \gamma_p|) + a_2(|x - \gamma_2| + |x - \gamma_p|) + \dots + \\ & + a_{p-1}(|x - \gamma_{p-1}| + |x - \gamma_p|) + a_{p+1}(|x - \gamma_{p+1}| + |x - \gamma_p|) + \dots + \\ & + a_n(|x - \gamma_n| + |x - \gamma_p|) + \Delta |x - \gamma_p|, \end{aligned}$$

де $\Delta = a_p - (a_1 + a_2 + \dots + a_{p-1} + a_{p+1} + \dots + a_n)$, $\Delta \geq 0$.

Кожний доданок набуває найменшого значення, коли $x = \gamma_p$.

Приклад 24. Довести нерівність

$$|x-1| + 2|x-2| + \dots + (n-1)|x-(n-1)| + \frac{n(n-1)}{2}|x-n| \geq \frac{1}{6}(n-1)n(n+1).$$

Доведення

Оскільки $\frac{n(n-1)}{2} = 1 + 2 + \dots + (n-1)$, то за теоремою 3

$$\begin{aligned} \min \left\{ |x-1| + 2|x-2| + \dots + (n-1)|x-(n-1)| + \frac{n(n-1)}{2}|x-n| \right\} = \\ = 1 \cdot (n-1) + 2(n-2) + \dots + (n-1) \cdot 1 = \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k) = \sum_{k=1}^{n-1} kn - \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \\ = \frac{n^2(n-1)}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Рівність досягається, коли $x = n$.

Приклад 25. Довести нерівність

$$\frac{(n-1)(n+2)}{2}|x-1| + 2|x-2| + 3|x-3| + \dots + n|x-n| \geq \frac{1}{3}(n-1)n(n+1).$$

Доведення

Помітимо, що $2 + 3 + \dots + n = \frac{2+n}{2}(n-1)$. За теоремою 3 матимемо:

$$\begin{aligned} \min \left\{ \frac{(n-1)(n+2)}{2}|x-1| + 2|x-2| + 3|x-3| + \dots + n|x-n| \right\} \geq \\ \geq 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + \dots + n(n-1) = \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k = \\ = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}. \end{aligned}$$

Рівність досягається, коли $x = 1$.

Вправа 29. Розв'язати рівняння:

- 1) $|x-1|+2|x-2|+\dots+9|x-9|+45|x-10|=165$;
- 2) $54|x-1|+2|x-2|+\dots+9|x-9|+10|x-10|=330$.

Відповідь. 1) $x = 10$; 2) $x = 1$.

Приклад 26. Довести нерівність

$$|x-1|+2|x-2|+\dots+(k+1)|x-(k-1)|+\frac{n^2+n-2k}{2}|x-k|+ \\ +(k+1)|x-(k+1)|+\dots+n|x-n|\geq\frac{1}{6}(2n^3-3(k-1)n^2-(3k-1)n+2k^3-2k).$$

Доведення

Помітимо, що $1+2+\dots+(k-1)+(k+1)+\dots+n=\frac{n^2+n-2k}{2}$.

За теоремою 3, ліва частина нерівності набуває найменшого значення при $x = k$. Це значення дорівнює

$$\begin{aligned} & 1\cdot(k-1)+2(k-2)+\dots+(k-1)\cdot 1+(k+1)\cdot 1+(k+2)\cdot 2+\dots+n(n-k)= \\ & =\sum_{p=1}^{k-1}p(k-p)+\sum_{p=1}^{n-k}p(k+p)=k\sum_{p=1}^{k-1}p-\sum_{p=1}^{k-1}p^2+k\sum_{p=1}^{n-k}p+\sum_{p=1}^{n-k}p^2= \\ & =k\cdot\frac{k(k-1)}{2}-\frac{(k-1)k(2k-1)}{6}+k\frac{(n-k+1)(n-k)}{2}+ \\ & \quad +\frac{(n-k)(n-k+1)(2n-2k+1)}{6}= \\ & =\frac{k(k-1)(k+1)+(n-k)(n-k+1)(2n+k+1)}{6}= \\ & =\frac{1}{6}(2n^3-3(k-1)n^2-(3k-1)n+2k^3-2k). \end{aligned}$$

Рівність досягається, коли $x = k$.

Зауважимо, що приклади 24 і 25 є окремими випадками прикладу 26.

Вправа 30. Розв'язати рівняння

$$|x-1|+2|x-2|+3|x-3|+\dots+10|x-10|=185.$$

Відповідь. $x = 4$.

Вправа 31. Довести нерівність

$$\frac{(n-1)(n+2)}{2}|x-n|+2|x-(n-1)|+3|x-(n-2)|+\dots+ \\ +(n-1)|x-2|+n|x-1|\geq \frac{(n-1)n(n+1)}{3}.$$

Приклад 27. Довести нерівність

$$|x-1^2|+2|x-2^2|+3|x-3^2|+\dots+\frac{n(n-1)}{2}|x-n^2|\geq \frac{1}{4}n^2(n^2-1).$$

Доведення

Оскільки $1+2+\dots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$, то за теоремою 3 $\min f(x)=f(n^2)$, де $f(x)$ — ліва частина нерівності, що доводиться.

$$\begin{aligned} \text{Отже, } f(x) &\geq 1\cdot(n^2-1^2)+2(n^2-2^2)+\dots+(n-1)(n^2-(n-1)^2)= \\ &= n^2(1+2+\dots+(n-1))-(1^3+2^3+\dots+(n-1)^3)= \\ &= n^2\cdot\frac{1+n-1}{2}\cdot(n-1)-\frac{(n-1)^2n^2}{4}=\frac{n^3(n-1)}{2}-\frac{(n-1)^2n^2}{4}=\frac{1}{4}n^2(n^2-1). \end{aligned}$$

Рівність досягається, лише коли $x=n^2$.

Вправа 32. Розв'язати рівняння

$$|x-1|+2|x-4|+3|x-9|+\dots+9|x-81|+45|x-100|=2475.$$

Відповідь. $x=100$.

Приклад 28. Довести нерівність

$$\frac{(n-1)(n+2)}{2}|x-1^2|+2|x-2^2|+3|x-3^2|+\dots+n|x-n^2|\geq \\ \geq \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4}.$$

Доведення

Оскільки $\frac{(n-1)(n+2)}{2}=2+3+\dots+n$, то за теоремою 3 ліва частина нерівності більша або дорівнює виразу:

$$\begin{aligned} &2(2^2-1^2)+3(3^2-1^2)+\dots+n(n^2-1^2)= \\ &= 2^3+3^3+\dots+n^3-(2+3+\dots+n)=(1^3+2^3+\dots+n^3)-(1+2+\dots+n)= \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n-1)(n+2)}{4}. \end{aligned}$$

Приклад 29. Довести нерівність

$$\frac{(n-1)(n+2)}{2} |x - \ln 1| + 2|x - \ln 2| + 3|x - \ln 3| + \dots + n|x - \ln n| \geq \ln \prod_{k=1}^n k^k.$$

Доведення

Нехай $f(x)$ ліва частина заданої нерівності.

Оскільки $2 + 3 + \dots + n = \frac{(n-1)(n+2)}{2}$, то за теоремою 3:

$$\min f(x) = f(\ln 1) = 2\ln 2 + 3\ln 3 + \dots + n\ln n = \ln \prod_{k=1}^n k^k.$$

Приклад 30. Довести нерівність

$$\sum_{k=1}^n q^k |x - k| \geq \frac{q^{n+1} - nq^2 + (n-1)q}{(q-1)^2}, \quad q \geq 2.$$

Доведення

Скористаємося тотожністю

$$\sum_{k=1}^n k \cdot q^k = \frac{q - (n+1)q^{n+1} + nq^{n+2}}{(q-1)^2}, \quad (13)$$

яку пропонуємо довести методом математичної індукції самостійно.

Помітимо, що $q^n > q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1}$, коли $q \geq 2$.

Справді,

$$q^n > \frac{q^n - q}{q-1} \Leftrightarrow q^{n+1} - 2q^n + q > 0 \Leftrightarrow q^n(q-2) + q > 0,$$

що справедливо при $q \geq 2$.

За теоремою 3, $\min f(x) = f(n)$, де $f(x) = \sum_{k=1}^n q^k |x - k|$.

Отже,

$$\begin{aligned} f(x) &\geq q(n-1) + q^2(n-2) + \dots + q^{n-1}(n-(n-1)) + q^n(n-n) = \\ &= n(q + q^2 + \dots + q^n) - (q + 2q^2 + 3q^3 + \dots + nq^n) = \\ &= n \cdot \frac{q^{n+1} - q}{q-1} - \frac{q - (n+1)q^{n+1} + nq^{n+2}}{(q-1)^2} = \frac{q^{n+1} - nq^2 + (n-1)q}{(q-1)^2}. \end{aligned}$$

Вправа 33. Довести нерівність $\sum_{k=1}^n 2^k |x - k| \geq 2^{n+1} - 2n - 2$.

Вправа 34. Довести, що коли $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$, то

$$q^{n+1} - nq^2 + (n-1)q : (q-1)^2.$$

Указівка. Нехай $t = \min \sum_{k=1}^n q^k |x - k|$, тоді $t \in \mathbb{N}$.

Приклад 31. Довести, що коли $q \geq 2$, то виконується нерівність

$$\sum_{k=1}^n q^k |x - k| \geq \frac{q^2 (q^n - 1)(q^{n-1} - 1)}{q^2 - 1}.$$

Доведення

Оскільки $q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} < q^n$ при $q \geq 2$ і $\min f(x) = f(q^n)$, де

$$f(x) = \sum_{k=1}^n q^k |x - q^k|, \text{ то}$$

$$\begin{aligned} f(q^n) &= q(q^n - q) + q^2(q^n - q^2) + q^3(q^n - q^3) + \dots + q^n(q^n - q^n) = \\ &= q^n(q + q^2 + \dots + q^n) - (q^2 + q^4 + q^6 + \dots + q^{2n}) = \\ &= q^n \cdot \frac{q^{n+1} - q}{q - 1} - q^2 \cdot \frac{q^{2n} - 1}{q^2 - 1} = \frac{q^{2n+1} - q^{n+2} - q^{n+1} + q^2}{q^2 - 1} = \\ &= \frac{q^2(q^n - 1)(q^{n-1} - 1)}{q^2 - 1}. \end{aligned}$$

Вправа 35. Довести нерівність

$$2|x - 2| + 2^2|x - 2^2| + \dots + 2^n|x - 2^n| \geq \frac{4(2^n - 1)(2^{n-1} - 1)}{3}.$$

Вправа 36. Розв'язати рівняння

$$3|x - 3| + 3^2|x - 3^2| + 3^3|x - 3^3| + 3^4|x - 3^4| + 3^5|x - 3^5| = 21780.$$

Відповідь. $x = 5$.

Приклад 32. Довести нерівність $\sum_{k=1}^n 2^k \left| x - \frac{1}{2^k} \right| \geq n - 2 + 2^{1-n}$.

Доведення

$$\text{Нехай } f(x) = 2 \left| x - \frac{1}{2} \right| + 2^2 \left| x - \frac{1}{4} \right| + \dots + 2^n \left| x - \frac{1}{2^n} \right|.$$

Тоді

$$\min f(x) = f\left(\frac{1}{2^n}\right) = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}\right) + 2^2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2^n}\right) + \dots + 2^{n-1}\left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}\right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 - 2 \cdot \frac{1}{2^n} + 1 - 2^2 \cdot \frac{1}{2^n} + \dots + 1 - 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = n - 1 - \frac{1}{2^n} \left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n} \right) = \\
 &= 1 - 2 \cdot \frac{1}{2^n} + 1 - 2^2 \cdot \frac{1}{2^n} + \dots + 1 - 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = n - 1 - \frac{1}{2^n} (2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}) = \\
 &= n - 1 - \frac{2^n - 2}{2^n} = n - 2 + 2^{1-n}.
 \end{aligned}$$

Рівність досягається, коли $x = \frac{1}{2^n}$.

Вправа 37. Розв'язати рівняння

$$2 \left| x - \frac{1}{2} \right| + 4 \left| x - \frac{1}{4} \right| + 8 \left| x - \frac{1}{8} \right| + 16 \left| x - \frac{1}{16} \right| + 32 \left| x - \frac{1}{32} \right| = 3 \frac{1}{16}.$$

Відповідь. $x = \frac{1}{32}$.

Приклад 33. Довести нерівність $\sum_{k=1}^n 2^k |x - 3^k| \geq \frac{4}{5} \cdot 6^n - 2 \cdot 3^n + \frac{6}{5}$.

Доведення

Нехай $f(x) = \sum_{k=1}^n 2^k |x - 3^k|$.

$$\begin{aligned}
 \text{Тоді } \min f(x) &= f(3^n) = \sum_{k=1}^n 2^k |3^n - 3^k| = \\
 &= 3^n \sum_{k=1}^n 2^k - \sum_{k=1}^n 6^k = 3^n (2^{n+1} - 2) - \frac{6^{n+1} - 6}{5} = \frac{4}{5} \cdot 6^n - 2 \cdot 3^n + \frac{6}{5}.
 \end{aligned}$$

Рівність досягається, коли $x = 3^n$.

Вправа 38. Довести нерівність

$$\sum_{k=1}^n q^k |x - p^k| \geq p^n \cdot \frac{q^{n+1} - q}{q - 1} - \frac{(pq)^{n+1} - pq}{pq - 1}, \text{ де } q > 2, pq \neq 1.$$

Приклад 34. Довести нерівність

$$\sum_{k=1}^n q^k |x - (a + d(k-1))| \geq \frac{dq(q^n - qn + n - 1)}{(q-1)^2}, \quad q \geq 2, d > 0.$$

Доведення

Нехай $f(x)$ — ліва частина заданої нерівності.

Оскільки $q^n > q + q^2 + \dots + q^{n-1}$, коли $q \geq 2$, то за теоремою 3:

$$\begin{aligned} \min f(x) &= f(a + d(n-1)) = \sum_{k=1}^n q^k |a + d(n-1) - (a + d(k-1))| = \\ &= \sum_{k=1}^n q^k |d(n-k)| = nd \sum_{k=1}^n q^k - d \sum_{k=1}^n k q^k = \\ &= nd \cdot \frac{q^{n+1} - q}{q-1} - d \cdot \frac{q - (n+1)q^{n+1} + nq^{n+2}}{(q-1)^2} = \\ &= \frac{d}{(q-1)^2} (n(q^{n+1} - q)(q-1) - q + (n+1)q^{n+1} - nq^{n+2}) = \\ &= \frac{dq}{(q-1)^2} (q^n - nq + n - 1). \end{aligned}$$

Рівність досягається, коли $x = a + d(n-1)$.

Вправа 39. Довести нерівність

- 1) $\sum_{k=1}^n 2^k |x - (3k-2)| \geq 6(2^n - n - 1)$.
- 2) $\sum_{k=1}^n 3^k |x - (2k-1)| \geq \frac{3(3^n - 2n - 1)}{2}$.

Приклад 35. Довести нерівність $\sum_{k=1}^n 2^k \left| x - \frac{k}{2^k} \right| \geq \frac{n^2 - 3n}{2} + \frac{n}{2^{n-1}}$.

Доведення

Оскільки $2^n > 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}$, то за теоремою 3:

$$\sum_{k=1}^n 2^k \left| x - \frac{k}{2^k} \right| \geq \sum_{k=1}^n 2^k \left| \frac{n}{2^n} - \frac{k}{2^k} \right|.$$

Помітимо, що $\frac{n}{2^n} \geq \frac{n+1}{2^{n+1}} \Leftrightarrow 2n \geq n+1$, що справедливо.

$$\begin{aligned} \text{Отже, } \sum_{k=1}^n 2^k \left| \frac{n}{2^n} - \frac{k}{2^k} \right| &= \sum_{k=1}^n 2^k \left(\frac{k}{2^k} - \frac{n}{2^n} \right) = \sum_{k=1}^n k - \frac{n}{2^n} \sum_{k=1}^n 2^k = \\ &= \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n}{2^n} (2^{n+1} - 2) = \frac{n^2 - 3n}{2} + \frac{n}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Рівність досягається, коли $x = \frac{n}{2^n}$.

Вправа 40. Довести, що коли $q \geq 2$, то виконується нерівність

$$\sum_{k=1}^n q^k \left| x - \frac{k}{q^k} \right| \geq \frac{n(n+1)}{2} - \frac{nq}{q-1} + \frac{n}{(q-1)q^{n-1}}.$$

Розглянемо суму $S(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{q^k} |x - \gamma_k|$, $q \geq 2$, $\gamma_k \in \mathbb{R}$.

Доведемо, що коли $q \geq 2$, то $\frac{1}{q} > \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \dots + \frac{1}{q^n}$.

$$\begin{aligned} \text{Справді, } \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \dots + \frac{1}{q^n} &< \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \dots + \frac{1}{q^n} + \frac{1}{q^{n+1}} = \\ &= \frac{1}{q^2} : \left(1 - \frac{1}{q} \right) = \frac{1}{q(q-1)} \leq \frac{1}{q}, \text{ що справедливо при } q \geq 2. \end{aligned}$$

За теоремою 3, маємо: $\min S(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{q^k} |\gamma_1 - \gamma_k|$.

Приклад 36. Довести нерівність $\sum_{k=1}^n \frac{1}{q^k} |x - k| \geq \frac{q^n - nq + n - 1}{q^n(1-q)^2}$, $q \geq 2$.

Доведення

Як щойно було доведено, коли $q \geq 2$, то

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{q^k} |x - k| &\geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{q^k} |1 - k| = \\ &= \frac{1}{q}(1-1) + \frac{1}{q^2}(2-1) + \frac{1}{q^3}(3-1) + \dots + \frac{1}{q^n}(n-1) = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{q^k} - \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \dots + \frac{1}{q^n} \right) = \frac{q^{n+1} - (n+1)q + n}{q^n(1-q)^2} - \frac{1}{q} \cdot \frac{\frac{1}{q^n} - 1}{\frac{1}{q} - 1} = \\ &= \frac{q^{n+1} - (n+1)q + n}{q^n(1-q)^2} - \frac{1 - q^n}{q^n(1-q)} = \frac{q^n - nq + n - 1}{q^n(1-q)^2}. \end{aligned}$$

У доведенні було використано тотожність

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{q^k} = \frac{q^{n+1} - (n+1)q + n}{q^n(1-q)^2},$$

яку пропонуємо довести самостійно за допомогою тотожності (13).

Вправа 41. Довести нерівність:

- 1) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} |x - k| \geq \frac{2^n - n - 1}{2^n};$
- 2) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} |x - k| \geq \frac{3^n - 2n - 1}{4 \cdot 3^n}.$

Вправа 42. Розв'язати рівняння

$$\frac{|x-1|}{2} + \frac{|x-2|}{4} + \frac{|x-3|}{8} + \dots + \frac{|x-10|}{2^{10}} = \frac{1013}{1024}.$$

Відповідь. $x = 1$.

Приклад 37. Довести нерівність

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} |x - \ln k| \geq \ln \left(\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{3} \cdot \dots \cdot \sqrt[2^n]{n} \right).$$

Доведення

Маємо:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} |x - \ln k| \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} |\ln 1 - \ln k| = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \ln k = \ln \left(\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{3} \cdot \dots \cdot \sqrt[2^n]{n} \right).$$

Рівність досягається, коли $x = 0$.

Приклад 38. Довести нерівність $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} |x - k^2| \geq 5 - \frac{n^2 + 4n + 5}{2^n}.$

Доведення

Оскільки $\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{2^n} = 6 - \frac{n^2 + 4n + 6}{2^n}$ (доведіть самостійно), то за теоре-

мою 3 матимемо:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} |x - k^2| &\geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} |1 - k^2| = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} (k^2 - 1) = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{2^k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = \\ &= 6 - \frac{n^2 + 4n + 6}{2^n} - \frac{2^n - 1}{2^n} = 5 - \frac{n^2 + 4n + 5}{2^n}. \end{aligned}$$

Рівність досягається, коли $x = 1$.

Вправа 43. Нехай $S(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} |x - k^2|$, $\min S(x) = t_n$. Обчислити

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n.$$

Відповідь. 5.

Вправа 44. Розв'язати рівняння $\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{2^k} |x - k^2| = 4 \frac{879}{1024}$.

Відповідь. $x = 1$.

Приклад 39. Довести нерівність $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} |x - k| \geq 1 - \frac{1}{n!}$.

Доведення

Відомо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) = e - 1$. Отже,

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} < e - 1 \Rightarrow \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < e - 2 < \frac{1}{1!}.$$

За теоремою 3, маємо: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} |x - k| \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} |1 - k| = \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{k!}$.

Коли $n = 1$, то цей вираз дорівнює $0 = 1 - \frac{1}{1!}$.

Коли $n \geq 2$, то цей вираз можна спростити так:

$$\sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} \right) = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{n!}.$$

Тепер доведемо методом математичної індукції, що

$$\sum_{k=1}^n \frac{k-1}{k!} = 1 - \frac{1}{n!}.$$

Отже, для всіх $n \geq 1$ нерівність справедлива.

Рівність досягається, коли $x = 1$.

Вправа 45. Розв'язати рівняння

$$\frac{|x-1|}{1!} + \frac{|x-2|}{2!} + \dots + \frac{|x-6|}{6!} = \frac{719}{720}.$$

Відповідь. $x = 1$.

Приклад 40. Довести нерівність $\sum_{k=1}^n |x - k| \cdot k! \geq n \sum_{k=1}^n k! - (n+1)! + 1$.

Доведення

Легко довести, що $n! \geq 1! + 2! + \dots + (n-1)!$ (зробіть це самостійно).

Тоді

$$S(x) = \sum_{k=1}^n |x - k| k! \geq S(n) = \sum_{k=1}^n k! (n - k) = \sum_{k=1}^n k! - \sum_{k=1}^n k \cdot k! = n \sum_{k=1}^n k! - ((n+1)! - 1).$$

Рівність досягається, коли $x = n$.

Приклад 41. Довести нерівність

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \cdot \left| x - \left| k^2 - \frac{3}{2} \right| \right| \geq 3 - \frac{n+2}{n!}.$$

Доведення

У прикладі 38 було доведено, що $\frac{1}{1!} > \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$.

$$\text{Нехай } S(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \cdot \left| x - \left| k^2 - \frac{3}{2} \right| \right|.$$

За теоремою 3, маємо: $\min S(x) = S\left(\frac{1}{2}\right)$.

Коли $n = 1$, нерівність справджується.

Коли $n \geq 2$, то

$$\begin{aligned} S(x) &\geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \cdot \left| \frac{1}{2} - \left| k^2 - \frac{3}{2} \right| \right| = \frac{1}{1!} \cdot 0 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} (k^2 - 2) = \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} (k^2 - 2) = \sum_{k=2}^n \frac{k}{(k-1)!} - 2 \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} = \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-2)!} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-1)!} - 2 \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} = \sum_{m=0}^{n-2} \frac{1}{m!} + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m!} - 2 \sum_{m=2}^n \frac{1}{m!} = \\ &= 3 - \frac{1}{(n-1)!} - \frac{2}{n!} = 3 - \frac{n+2}{n!}. \end{aligned}$$

Рівність досягається, коли $x = \frac{1}{2}$.

Вправа 46. Довести нерівність:

$$1) \sum_{k=1}^n \frac{\left| x - \left| k^2 - 2k + \frac{1}{2} \right| \right|}{k!} \geq 1 - \frac{1}{(n-1)!};$$

$$2) \sum_{k=1}^n \frac{\left| x - \left| k^2 - k - \frac{1}{2} \right| \right|}{k!} \geq 2 - \frac{n+1}{n!}.$$

Приклад 42. Довести нерівність $\sum_{k=1}^n F_k |x - k| \geq F_{n+2} + F_n - n - 1$, $n \geq 2$,

де $\{F_k, k \geq 1\}$ — послідовність Фібоначчі.

Доведення

Числа Фібоначчі мають такі властивості:

$$1) \sum_{k=1}^n F_k = F_{n+2} - 1;$$

$$2) \sum_{k=1}^n kF_n = (n-1)F_{n+2} - F_{n+1} + 2.$$

Рівність 1) була доведена у прикладі 7. Доведемо рівність 2).

1°. Якщо $n = 1$, то $F_1 = (1-1)F_3 - F_2 + 2$, $1 \cdot 1 = -1 + 2$, що є правильним.

2°. Нехай $\sum_{k=1}^n kF_n = (n-1)F_{n+2} - F_{n+1} + 2$. Тоді

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} kF_n &= (n-1)F_{n+2} - F_{n+1} + 2 + (n+1)F_{n+1} = (n-1)F_{n+2} + nF_{n+1} + 2 = \\ &= n(F_{n+2} + F_{n+1}) - F_{n+2} + 2 = nF_{n+3} - F_{n+2} + 2, \end{aligned}$$

що завершує індуктивне доведення.

Легко перевірити, що задана в умові нерівність справджується, коли $n = 2, 3$.

Коли $n \geq 4$, завдяки властивості 1) виконується рівність

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{k=1}^n F_k |x - k| = \\ &= \sum_{k=2}^{n-2} F_k (|x - n| + |x - k|) + (F_{n-1} - 1)|x - (n-1)| + (|x - n| + |x - (n-1)|). \end{aligned}$$

За лемою 1, $\min(|x - n| + |x - k|) = n - k$, коли $x \in [k; n]$, $1 \leq k \leq n - 1$.

Отже, коли $x = n - 1$, мінімум досягається в кожній дужці. Крім того, $\min|x - (n-1)| = 0$, і він досягається, коли $x = n - 1$.

$$\begin{aligned} \text{Отже, } \min S(x) &= S(n-1) = \sum_{k=1}^{n-2} F_k |x - k| + (n - (n-1)) = \\ &= n \sum_{k=1}^{n-2} F_k - \sum_{k=1}^{n-2} kF_k + 1 = n(F_n - 1) - (n-3)F_n + 2F_{n-1} + 1 = \\ &= 3F_n + F_{n-1} - n - 1 = 2F_n + (F_n + F_{n-1}) - n - 1 = 2F_n + F_{n-1} - n - 1 = \\ &= F_n + (F_n + F_{n+1}) - n - 1 = F_{n+2} + F_n - n - 1. \end{aligned}$$

Рівність досягається, коли $x = n - 1$.

Приклад 43. Довести нерівність

$$\sum_{k=1}^n F_k |x - F_k| \geq F_n^2 - F_{n-1} (F_n - F_{n-1} + 1), \quad n \geq 2.$$

Доведення

У прикладі 13 було доведено рівність $\sum_{k=1}^n F_k^2 = F_n \cdot F_{n+1}$.

Нехай $f(x) = \sum_{k=1}^n F_k |x - F_k|$. Так само, як і в прикладі 42, можна показати, що $\min f(x) = f(F_{n-1})$. Тоді

$$\begin{aligned} f(x) &\geq \sum_{k=1}^n F_k |F_{n-1} - F_k| = \sum_{k=1}^{n-1} F_k (F_{n-1} - F_k) + F_n (F_n - F_{n-1}) = \\ &= F_{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} F_k - \sum_{k=1}^{n-1} F_k^2 + F_n^2 - F_n \cdot F_{n-1} = F_{n-1} (F_{n+1} - 1) - F_{n-1} \cdot F_n + F_n^2 - F_n \cdot F_{n-1} = \\ &= F_n^2 - F_{n-1} (2F_n \cdot F_{n+1} + 1) = F_n^2 - F_{n-1} (F_n - F_{n-1} + 1). \end{aligned}$$

Зауваження. Оскільки $F_n - F_{n-1} = F_{n-2}$, то

$$\sum_{k=1}^n F_k |x - F_k| \geq F_n^2 - F_{n-1} (F_{n-2} + 1), \quad \text{коли } n \geq 3.$$

Вправа 47. Довести нерівність $\sum_{k=1}^n F_k |x - F_{k+1}| \geq F_{2n-1} (F_{2n} - 1) - F_{2n-2}^2$.

Приклад 44. Довести нерівність $\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k |x - k| \geq n (4C_{2n-1}^{n-1} - C_{2n}^n)$.

Доведення

Нехай

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k |x - k| = C_{2n}^0 |x - 0| + C_{2n}^1 |x - 1| + \dots + C_{2n}^n |x - n| + \dots + C_{2n}^{2n} |x - 2n|.$$

Ураховуючи, що $C_m^p = C_m^{m-p}$, маємо:

$$\begin{aligned} f(x) &= C_{2n}^0 (|x - 0| + |x - 2n|) + C_{2n}^1 (|x - n| + |x - (2n - 1)|) + \dots + \\ &\quad + C_{2n}^{n-1} (|x - (n - 1)| + |x - (n + 1)|) + C_{2n}^n |x - n|. \end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{aligned} \min f(x) &= f(n) = C_{2n}^0 \cdot 2n + C_{2n}^1 \cdot 2(n - 1) + \dots + C_{2n}^{n-1} \cdot 2(n - (n - 1)) = \\ &= 2n (C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + \dots + C_{2n}^{n-1}) - 2 (C_{2n}^1 + 2C_{2n}^2 + 3C_{2n}^3 + \dots + (n - 1)C_{2n}^{n-1}). \quad (*) \end{aligned}$$

Оскільки $C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + \dots + C_{2n}^n + C_{2n}^{n+1} + \dots + C_{2n}^{2n} = 2^{2n}$, то

$$C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + \dots + C_{2n}^{n-1} = (2^{2n} - C_{2n}^n) \cdot \frac{1}{2}.$$

Нехай $S = 1 \cdot C_{2n}^1 + 2C_{2n}^2 + 3C_{2n}^3 + \dots + (n-1)C_{2n}^{n-1}$. Помітимо, що $kC_m^k = mC_{m-1}^{k-1}$.

Справді, $k \cdot \frac{m!}{k!(m-k)!} = m \cdot \frac{(m-1)!}{(k-1)!(m-k)!}$. Тому $kC_{2n}^k = 2nC_{2n-1}^{k-1}$.

$$\begin{aligned} S &= 2nC_{2n-1}^0 + 2nC_{2n-1}^1 + 2nC_{2n-1}^2 + \dots + 2nC_{2n-1}^{n-2} = \\ &= 2n(C_{2n-1}^0 + C_{2n-1}^1 + C_{2n-1}^2 + \dots + C_{2n-1}^{n-2}). \end{aligned}$$

Оскільки

$$C_{2n-1}^0 + C_{2n-1}^1 + C_{2n-1}^2 + \dots + C_{2n-1}^{n-2} + C_{2n-1}^{n-1} + C_{2n-1}^n + \dots + C_{2n-1}^{2n-1} = 2^{2n-1},$$

$$\text{то } C_{2n-1}^0 + C_{2n-1}^1 + \dots + C_{2n-1}^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot 2^{2n-1} = 2^{2n-2},$$

$$\text{а } C_{2n-1}^0 + C_{2n-1}^1 + C_{2n-1}^2 + \dots + C_{2n-1}^{n-2} = 2^{2n-2} - C_{2n-1}^{n-1}.$$

Отже, $S = 2n(2^{2n-2} - C_{2n-1}^{n-1})$. Тепер із (*) маємо

$$\min f(x) = 2n \cdot \frac{1}{n} (2^{2n} - C_{2n}^n) - 2 \cdot 2n (2^{2n-2} - C_{2n-1}^{n-1}) = n(4C_{2n-1}^{n-1} - C_{2n}^n).$$

Рівність досягається, коли $x = n$.

Приклад 44. Довести нерівність

$$\begin{aligned} &|x - C_{2n}^1| + 2|x - C_{2n}^2| + 3|x - C_{2n}^3| + \dots + (n-1)|x - C_{2n}^{n-1}| + \frac{n(n-1)}{2}|x - C_{2n}^n| \geq \\ &\geq \frac{n(n+1)}{2}C_{2n}^n - n \cdot 2^{2n-1}, \quad n \geq 3. \end{aligned}$$

Доведення

Послідовність $\{\gamma_n = C_{2n}^k, k = \overline{1, n}\}$ зростаюча.

Оскільки $1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$, то за теоремою 3 маємо

$$\begin{aligned} &|x - C_{2n}^1| + 2|x - C_{2n}^2| + 3|x - C_{2n}^3| + \dots + \\ &+ (n-1)|x - C_{2n}^{n-1}| + \frac{n(n-1)}{2}|x - C_{2n}^n| \geq \\ &\geq (C_{2n}^n - C_{2n}^1) + 2(C_{2n}^n - C_{2n}^2) + 3(C_{2n}^n - C_{2n}^3) + \dots + (n-1)(C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1}) = \\ &= C_{2n}^n(1 + 2 + \dots + (n-1)) - \sum_{k=1}^{n-1} kC_{2n}^k = \frac{n(n-1)}{2}C_{2n}^n - 2n(2^{2n-2} - C_{2n-1}^{n-1}). \end{aligned}$$

Ми скористалися результатом із прикладу 44:

$$\sum_{k=1}^{n-1} k C_{2n}^k = 2n(2^{2n-2} - C_{2n-1}^{n-1}).$$

Далі помітимо, що

$$\frac{n(n-1)}{2} C_{2n}^n - 2n(2^{2n-2} - C_{2n-1}^{n-1}) = \frac{n(n-1)}{2} C_{2n}^n + 2n C_{2n-1}^{n-1} - n \cdot 2^{2n-1}.$$

Також помітимо, що

$$2n C_{2n-1}^{n-1} = 2n \frac{(2n-1)!}{(n-1)!n!} = \frac{(2n)!n}{n!n!} = n C_{2n}^n.$$

Отже,

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)}{2} C_{2n}^n + 2n C_{2n-1}^{n-1} - n \cdot 2^{2n-1} &= \frac{n(n-1)}{2} C_{2n}^n + n C_{2n}^n - n \cdot 2^{2n-1} = \\ &= \frac{n(n+1)}{2} C_{2n}^n - n \cdot 2^{2n-1}. \end{aligned}$$

Рівність досягається, коли $x = C_{2n}^n$.

Вправа 48. Довести нерівність

$$\frac{n^2 + n - 2}{2} |x - C_{2n}^1| + 2|x - C_{2n}^2| + 3|x - C_{2n}^3| + \dots + n|x - C_{2n}^n| \geq n(2^{2n-1} - n^2 - n).$$

Приклад 46. Довести нерівність

$$\begin{aligned} &C_{2n}^0 |x - C_{2n}^0| + C_{2n}^1 |x - C_{2n}^1| + C_{2n}^2 |x - C_{2n}^2| + \dots + \\ &+ C_{2n}^{n-1} |x - C_{2n}^{n-1}| + \frac{1}{2}(2^{2n} - C_{2n}^n) |x - C_{2n}^n| \geq 2^{2n-1} C_{2n}^n - \frac{1}{2} C_{4n}^{2n}, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Доведення

Оскільки $C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + \dots + C_{2n}^{n-1} = \frac{1}{2}(2^{2n} - C_{2n}^n)$, то за теоремою 3:

$$\begin{aligned} &C_{2n}^0 |x - C_{2n}^0| + C_{2n}^1 |x - C_{2n}^1| + C_{2n}^2 |x - C_{2n}^2| + \dots + \\ &+ C_{2n}^{n-1} |x - C_{2n}^{n-1}| + \frac{1}{2}(2^{2n} - C_{2n}^n) |x - C_{2n}^n| \geq \\ &\geq C_{2n}^0 (C_{2n}^n - C_{2n}^0) + C_{2n}^1 (C_{2n}^n - C_{2n}^1) + \dots + C_{2n}^{n-1} (C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1}) = \\ &= C_{2n}^n (C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + \dots + C_{2n}^{n-1}) - \left((C_{2n}^0)^2 + (C_{2n}^1)^2 + \dots + (C_{2n}^{n-1})^2 \right). \quad (**) \end{aligned}$$

Відома формула Вандермонда $\sum_{p=0}^k C_n^p \cdot C_m^{k-p} = C_{m+n}^k$ (дивись, наприклад [3]). Покладаючи в цій формулі $n = m = k$, маємо $\sum_{p=0}^n (C_n^p)^2 = C_{2n}^n$, звідки $\sum_{k=0}^{2n} (C_{2n}^k)^2 = C_{4n}^{2n}$.

Оскільки $C_{2n}^k = C_{2n}^{2n-k}$, то

$$\sum_{k=0}^{2n} (C_{2n}^k)^2 = 2 \sum_{k=0}^{n-1} (C_{2n}^k)^2 + (C_{2n}^n)^2 \quad \text{і} \quad \sum_{k=0}^{n-1} (C_{2n}^k)^2 = \frac{1}{2} (C_{4n}^{2n} - (C_{2n}^n)^2).$$

Тепер із (***) дістанемо

$$\begin{aligned} C_{2n}^0 |x - C_{2n}^0| + C_{2n}^1 |x - C_{2n}^1| + \dots + C_{2n}^{n-1} |x - C_{2n}^{n-1}| + \frac{1}{2} (2^{2n} - C_{2n}^n) |x - C_{2n}^n| &\geq \\ &\geq C_{2n}^n \cdot \frac{1}{2} (2^{2n} - C_{2n}^n) - \frac{1}{2} (C_{4n}^{2n} - C_{2n}^n)^2 = 2^{2n-1} C_{2n}^n - \frac{1}{2} C_{4n}^{2n}. \end{aligned}$$

Рівність досягається, коли $x = C_{2n}^n$.

Приклад 47. Довести нерівність

$$\begin{aligned} |x - F_1| + 2|x - F_2| + 3|x - F_3| + \dots + (n-1)|x - F_{n-1}| + \frac{n(n-1)}{2} |x - F_n| &\geq \\ &\geq \frac{n^2 - n + 2}{2} F_n - (n-2)F_{n+1} - 2, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Доведення

Позначимо через $f(x)$ ліву частину нерівності. Оскільки $1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$, то за теоремою 3 маємо:

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(F_n) = (F_n - F_1) + 2(F_n - F_2) + 3(F_n - F_3) + \dots + (n-1)(F_n - F_{n-1}) = \\ &= F_n (1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)) - \sum_{k=1}^{n-1} k F_k = \frac{n(n-1)}{2} F_n - (n-2)F_{n+1} + F_n - 2 = \\ &= \frac{n^2 - n + 2}{2} F_n - (n-2)F_{n+1} - 2. \end{aligned}$$

Рівність досягається, коли $x = F_n$ (раніше ми довели, що

$$\sum_{k=1}^n k F_k = (n-1)F_{n+2} - F_{n+1} + 2).$$

Вправа 49. Довести нерівність

$$\frac{(n-1)(n+2)}{2} |x - F_1| + 2|x - F_2| + 3|x - F_3| + \dots + n|x - F_n| \geq \\ \geq (n-1)F_{n+2} - F_{n+1} + 1 - \frac{(n-1)(n+2)}{2} F_1, \quad n \geq 2,$$

(F_k — числа Фібоначчі).

7.4. НЕРІВНОСТІ ВИДУ $\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_k |x - \gamma_k| \geq c$

Приклад 48. Довести нерівність $n \geq \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} |x - k| \geq -n$.

Доведення

Розглянемо функцію

$$f(x) = |x - k| - |x - (k+1)|, \quad k \in \mathbb{N}.$$

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \leq k, \\ 2x - (2k+1), & k < x < k+1, \\ 1, & x \geq k+1. \end{cases}$$

На рис. 1 показано графік цієї функції.

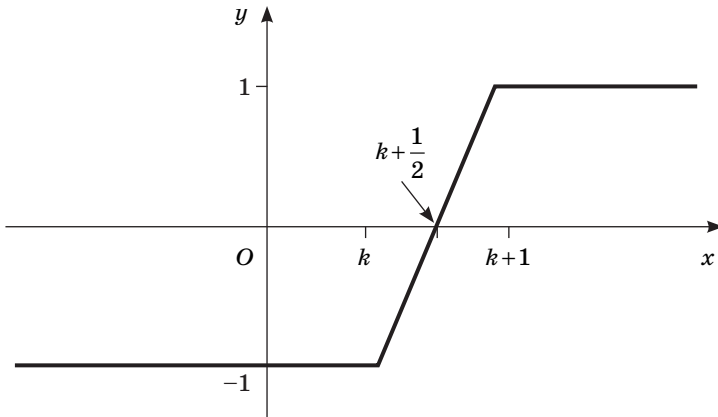


Рис. 1

Отже,

$$-1 \leq |x - k| - |x - (k+1)| \leq 1. \quad (14)$$

Рівність ліворуч досягається, коли $x \leq k$, праворуч — коли $x \geq k+1$. Запишемо n подвійних нерівностей:

- ✓ $-1 \leq |x-1| - |x-2| \leq 1$,
- ✓ $-1 \leq |x-3| - |x-4| \leq 1$,
- ✓ ...
- ✓ $-1 \leq x - (2n-1) - |x-2n| \leq 1$.

Додавши почленно ці нерівності, матимемо:

$$-n \leq \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} |x-k| \leq n.$$

В одержаній подвійній нерівності рівність ліворуч досягається, коли $x \leq 1$, а праворуч — коли $x \geq 2n$.

Вправа 50. Довести нерівність:

- 1) $|x + (n-1)| + \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} |x-k| \geq -n$;
- 2) $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} |x-k| + |x - (2n+1)| \geq -n$.

Узагальненням подвійної нерівності (14) є нерівність

$$-|b-a| \leq |x-b| - |x-a| \leq |b-a|, \quad (15)$$

яка випливає з відомої нерівності $|u+v| \leq |u| + |v|$. Коли $a < b$, із нерівності (15) матимемо:

$$a-b \leq |x-b| - |x-a| \leq b-a. \quad (16)$$

У (16) рівність ліворуч досягається, коли $x \geq b$, праворуч — коли $x \leq a$.

Крім того, при $a < b$ маємо:

$$a-b \leq |x-a| - |x-b| \leq b-a. \quad (17)$$

У (17) рівність ліворуч досягається, коли $x \leq a$, праворуч — коли $x \geq b$.

ТЕОРЕМА 4. Нехай $f(x) = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} |x - \gamma_k|$, де $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_{2n}$. Має місце нерівність

$$\sum_{k=1}^n \gamma_{2k-1} - \sum_{k=1}^n \gamma_{2k} \leq \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} |x - \gamma_k| \leq \sum_{k=1}^n \gamma_{2k} - \sum_{k=1}^n \gamma_{2k-1}. \quad (18)$$

Доведення

Напишемо n подвійних нерівностей згідно з (17):

- ✓ $\gamma_1 - \gamma_2 \leq |x - \gamma_1| - |x - \gamma_2| \leq \gamma_2 - \gamma_1,$
- ✓ $\gamma_3 - \gamma_4 \leq |x - \gamma_3| - |x - \gamma_4| \leq \gamma_4 - \gamma_3,$
- ✓ ...
- ✓ $\gamma_{2n-1} - \gamma_{2n} \leq |x - \gamma_{2n-1}| - |x - \gamma_{2n}| \leq \gamma_{2n} - \gamma_{2n-1}.$

Додаючи почленно всі ці нерівності, дістанемо:

$$\sum_{k=1}^n \gamma_{2k-1} - \sum_{k=1}^n \gamma_{2k} \leq \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} |x - \gamma_k| \leq \sum_{k=1}^n \gamma_{2k} - \sum_{k=1}^n \gamma_{2k-1}.$$

Рівність ліворуч досягається, коли $x \leq \gamma_1$, праворуч — коли $x \geq \gamma_{2n}$.

Зауваження. Подвійну нерівність (18) можна подати у такому вигляді:

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \gamma_k \leq \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} |x - \gamma_k| \leq \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \gamma_k. \quad (19)$$

Приклад 49. Нехай $f(x) = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} |x - a_k|$, де $\{a_k, 1 \leq k \leq 2n\}$ — зростаюча арифметична прогресія з різницею d . Довести, що $-dn \leq f(x) \leq dn$.

Доведення

Згідно з (18) матимемо:

$$f(x) \leq (a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + \dots + (a_{2n} - a_{2n-1}) = dn,$$

$$(a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n}) \leq f(x) \text{ або } -dn \leq f(x).$$

Рівність $f(x) = -dn$ досягається, коли $x \leq a_1$, а рівність $f(x) = dn$ — коли $x \geq a_{2n}$.

Вправа 51. Довести нерівність:

- 1) $-2n \leq |x-1| - |x-3| + |x-5| - |x-7| + \dots + |x-(4n-3)| - |x-(4n-1)| \leq 2n.$
- 2) $-3n \leq |x-1| - |x-4| + |x-7| - |x-10| + \dots + |x-(6n-5)| - |x-(6n-2)| \leq 3n.$

Коли досягається рівність у цих нерівностях?

Вправа 52. Розв'язати рівняння:

- 1) $|x-2|-|x-5|+|x-8|-|x-11|+\dots+|x-32|-|x-35|=18$;
- 2) $|x-2|-|x-5|+|x-8|-|x-11|+\dots+|x-32|-|x-35|=-18$.

Відповідь. 1) $x=3$; 2) $x=2$.

Приклад 50. Довести, що коли $q > 1$, то виконується нерівність

$$\frac{q-q^{2n+1}}{q+1} \leq \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} |x-q^k| \leq \frac{q^{2n+1}-q}{q+1}.$$

Доведення

Оскільки при $q > 1$ виконуються нерівності $q < q^2 < q^3 < \dots < q^{2n}$, то згідно з (18) маємо:

$$\sum_{k=1}^n q^{2k-1} - \sum_{k=q}^n q^{2k} \leq \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} |x-q^k| \leq \sum_{k=1}^n q^{2k} - \sum_{k=1}^n q^{2k-1}.$$

Помітимо, що

$$\sum_{k=1}^n q^{2k} - \sum_{k=1}^n q^{2k-1} = (q-1) \sum_{k=1}^n q^{2k-1} = (q-1) \cdot \frac{q^{2n+1}-q}{q^2-1} = \frac{q^{2n+1}-q}{q+1}.$$

Рівність праворуч досягається, коли $x \geq q^{2n}$, ліворуч — коли $x \leq q$.

Вправа 53. Довести подвійну нерівність

$$\frac{2}{3}(1-4^n) \leq \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} |x-2^k| \leq \frac{2}{3}(4^n-1).$$

Вправа 54. Розв'язати рівняння:

- 1) $|x-2|-|x-4|+|x-8|-|x-16|-\dots-|x-1024|=682$;
- 2) $|x-3|-|x-9|+|x-27|-|x-81|-\dots-|x-729|=-546$.

Відповідь. 1) $x=1024$; 2) $x=3$.

Приклад 51. Довести подвійну нерівність

$$1-F_{2n-1} \leq \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} |x-F_k| \leq F_{2n-1}-1,$$

де $\{F_k, k \geq 1\}$ — послідовність Фібоначчі.

Доведення

Доведемо за допомогою математичної індукції рівність

$$F_2-F_1+F_4-F_3+\dots+F_{2n}-F_{2n-1}=F_{2n-1}-1.$$

1°. Якщо $n=1$, то $F_2-F_1=1-1=0=F_1-1$. Рівність справджується.

2°. Нехай $F_2 - F_1 + F_4 - F_3 + \dots + F_{2n} - F_{2n-1} = F_{2n-1} - 1$.

Тоді

$$\begin{aligned} F_2 - F_1 + F_4 - F_3 + \dots + F_{2n} - F_{2n-1} + F_{2n+2} - F_{2n+1} &= \\ = F_{2n-1} - 1 + F_{2n+2} - F_{2n+1} &= F_{2n-1} - 1 + F_{2n} = F_{2n+1} - 1, \end{aligned}$$

що завершує індуктивне доведення.

Послідовність Фібоначчі неспадна. Доведемо праву частину заданої в умові нерівності:

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} |x - F_k| \leq F_2 - F_1 + F_4 - F_3 + \dots + F_{2n} - F_{2n-1} = F_{2n-1} - 1.$$

Ліва частина доводиться аналогічно.

Рівність праворуч досягається, коли $x = F_{2n}$, ліворуч — коли $x = 1$.

Приклад 52. Довести подвійну нерівність

$$-n(2n+1) \leq \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} |x - k^2| \leq n(2n+1).$$

Доведення

Послідовність $\gamma_k = k^2$, $k \geq 1$, зростаюча. Згідно з (18), маємо:

$$\sum_{k=1}^n (2k-1)^2 - \sum_{k=1}^n (2k)^2 \leq \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} |x - k^2| \leq \sum_{k=1}^n (2k)^2 - \sum_{k=1}^n (2k-1)^2.$$

Далі помітимо, що

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (2k)^2 - \sum_{k=1}^{2n} (2k-1)^2 &= 2^2 - 1^2 + 4^2 - 3^2 + \dots + (2n)^2 - (2n-1)^2 = \\ &= (2 \cdot 1 + 1) + (2 \cdot 3 + 1) + \dots + (2 \cdot 5 + 1) + \dots + (2(2n-1) + 1) = \\ &= 2(1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)) + n = 2n^2 + n = n(2n+1). \end{aligned}$$

Ми скористалися тотожністю $(m+1)^2 - m^2 = 2m+1$.

Ліва частина нерівності доводиться аналогічно.

Рівність ліворуч досягається, коли $x = 1$, праворуч — коли $x = 4n^2$.

Вправа 55. Розв'язати рівняння:

- 1) $|x-1^2| - |x-2^2| + |x-3^2| - |x-4^2| + \dots - |x-10^2| = 55$;
- 2) $|x-1^2| - |x-2^2| + |x-3^2| - |x-4^2| + \dots - |x-10^2| = -55$.

Відповідь. 1) $x = 100$; 2) $x = 1$.

Вправа 56. Довести подвійну нерівність:

- 1) $-8n^2 \leq \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} |x - (2k-1)^2| \leq 8n^2;$
- 2) $-3n(6n-1) \leq \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} |x - (3k-2)^2| \leq 3n(6n-1).$

Коли досягається рівність у цих нерівностях?

Вправа 57. Довести подвійну нерівність

$$-\ln \frac{2^n \cdot n!}{(2n-1)!!} \leq \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} |x - \ln k| \leq \ln \frac{2^n \cdot n!}{(2n-1)!!}.$$

(Нагадаємо, що $(2n-1)!! = (2n-1) \cdot (2n-3) \cdot \dots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1$.)

Коли досягається рівність у цій нерівності?

Приклад 53. Довести подвійну нерівність

$$\begin{aligned} -\frac{\sqrt{2} \sin \frac{\pi(n+1)}{4n}}{2 \sin \frac{\pi}{4n}} + \frac{\sin \frac{\pi}{8} \cdot \sin \frac{\pi(n+1)}{8n}}{\sin \frac{\pi}{8n}} &\leq \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \left| x - \sin \frac{k\pi}{4n} \right| \leq \\ &\leq \frac{\sqrt{2} \sin \frac{\pi(n+1)}{4n}}{2 \sin \frac{\pi}{4n}} - \frac{\sin \frac{\pi}{8} \cdot \sin \frac{\pi(n+1)}{8n}}{\sin \frac{\pi}{8n}}. \end{aligned}$$

Доведення

$$\sum_{k=1}^{2n} \sin k\alpha = \frac{\sin \frac{(n+1)\alpha}{2} \cdot \sin \frac{n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Послідовність $\gamma_k = \sin \frac{k\pi}{4n}$, $1 \leq k \leq 2n$, зростаюча. Згідно з (18),

матимемо:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \left| x - \sin \frac{k\pi}{4n} \right| &\leq \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{2n} - \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{4n} = \\ &= \frac{\sqrt{2} \sin \frac{\pi(n+1)}{4n}}{2 \sin \frac{\pi}{4n}} - \frac{\sin \frac{\pi}{8} \cdot \sin \frac{\pi(n+1)}{8n}}{\sin \frac{\pi}{8n}}. \end{aligned}$$

Ліва частина нерівності доводиться аналогічно.

Рівність ліворуч досягається, коли $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, праворуч — коли $x = 1$.

Приклад 54. Довести нерівність

$$\sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k+1} k |x - k| \geq 0. \quad (20)$$

Доведення

ЛЕМА. Коли $k \in \mathbb{N}$, то виконується нерівність

$$|x - k| - 2|x - (k+1)| + |x - (k+2)| \geq 0.$$

Рівність досягається, коли $x \geq k+2$ або $x \leq k$.

Доведення леми

Нехай

$$\varphi(x) = |x - k| - 2|x - (k+1)| + |x - (k+2)|.$$

Тоді

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq k \text{ або } x \geq k+2, \\ 2x - 2k, & k \leq x \leq k+1, \\ -2x + 2k + 4, & k+1 \leq x \leq k+2. \end{cases}$$

Графік функції показано на рис. 2.

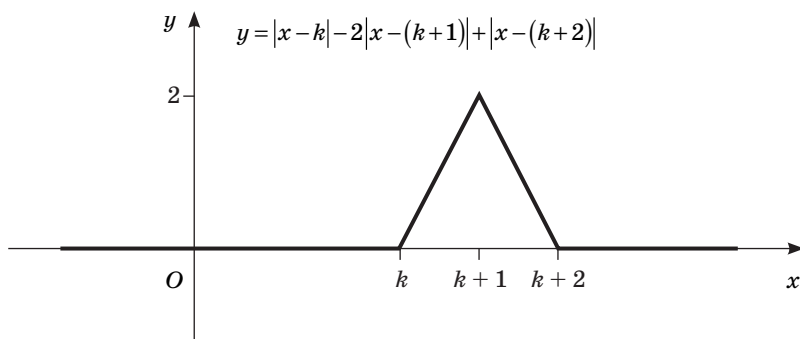


Рис. 2

Отже, $0 \leq \varphi(x) \leq 2$. Лему доведено.

Продовжимо розв'язання прикладу.

Має місце тотожність

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k+1} k \cdot |x-k| = (|x-1|-2|x-2|+|x-3|+ \\
& +2(|x-3|-2|x-4|+|x-5|)+3(|x-5|-2|x-6|+|x-7|)+\dots+ \\
& +k(|x-(2k-1)|-2|x-2k|+|x-(2k+1)|)+\dots+ \\
& +(n-1)(|x-(2n-3)|-2|x-(2n-2)|+|x-(2n-1)|)+n|x-(2n-1)|. (***)
\end{aligned}$$

У правій частині (***) маємо $(n-1)$ дужку і доданок $n|x-(2n-1)|$. За лемою, кожна дужка не менша за нуль, причому в кожній точці променя $[2n-1; +\infty]$ досягається рівність. Dodanok $n|x-(2n-1)|$ також невід'ємний і дорівнює нулю, коли $x=2n-1$.

Отже, $\sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k+1} k|x-k| \geq 0$. Рівність досягається, коли $x=2n-1$.

Зауваження. Коли $x \geq 2n-1$, то $f(x) \geq n(x-(2n-1))$, де $f(x)$ — ліва частина нерівності (20). Звідси, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ і $f(x)$ не має більшого значення.

Вправа 58. Розв'язати рівняння

$$|x-1|-2|x-2|+3|x-3|-\dots-2008|x-2008|+2009|x-2009|=0.$$

Відповідь. $x=2009$.

Вправа 59. Для яких значень параметра p рівняння

$$|x-1|-2|x-2|+3|x-3|-\dots-20|x-20|+21|x-21|=p$$

не має розв'язків?

Відповідь. $p < 0$.

Приклад 55. Послідовність $\{a_k, k \geq 1\}$ — зростаюча арифметична прогресія з додатним першим членом. Довести нерівність

$$\sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k+1} a_k |x-k| \geq (n-1)(a_1-d).$$

Доведення

Числа a_k, a_{k+1}, a_{k+2} утворюють арифметичну прогресію, у якій $a_k > 0, d > 0$.

ЛЕМА. Має місце нерівність

$$a_k |x-k| - 2a_{k+1} |x-(k+1)| + a_{k+2} |x-(k+2)| \geq -2d.$$

Рівність досягається, коли $x \geq k+2$.

Доведення лема

Нехай

$$f(x) = a_k |x - k| - 2a_{k+1} |x - (k+1)| + a_{k+2} |x - (k+2)|.$$

Тоді

$$f(x) = \begin{cases} 2d, & x \leq k, \\ 2a_k x - 2ka_k + 2d, & k \leq x \leq k+1, \\ -2a_{k+2}x + 2ka_{k+2} + 2(a_{k+1} + a_{k+2}), & k+1 \leq x \leq k+2, \\ -2d, & k+2 \leq x. \end{cases}$$

Графік функції $f(x)$ зображено на рис. 3.

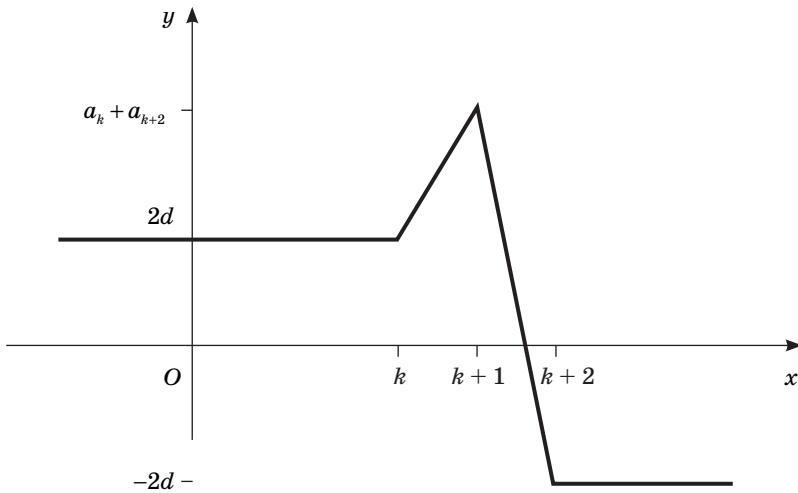


Рис. 3

Отже, $-2d \leq f(x) \leq a_k + a_{k+2}$. Лему доведено.

Повернемося до розв'язання прикладу. За лемою маємо $(n-1)$ нерівність:

$$\checkmark \quad a_1 |x-1| - 2a_2 |x-2| + a_3 |x-3| \geq -2d,$$

$$\checkmark \quad a_3 |x-3| - 2a_4 |x-4| + a_5 |x-5| \geq -2d,$$

✓ ...

$$\checkmark \quad a_{2n-5} |x-(2n-5)| - 2a_{2n-4} |x-(2n-4)| + a_{2n-3} |x-(2n-3)| \geq -2d,$$

$$\checkmark \quad a_{2n-3} |x-(2n-3)| - 2a_{2n-2} |x-(2n-2)| + a_{2n-1} |x-(2n-1)| \geq -2d.$$

Додавши почленно ці нерівності, матимемо:

$$a_1|x-1|+2(-a_2|x-2|+a_3|x-3|-a_4|x-4|)+\dots+ \\ +a_{2n-3}|x-(2n-3)|-2a_{2n-2}|x-(2n-2)|+a_{2n-1}|x-(2n-1)|\geq -2(n-1)d$$

або

$$2\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k+1}a_k|x-k|\geq 2d(1-n)+a_1|x-1|+a_{2n-1}|x-(2n-1)|. \quad (****)$$

Легко бачити (доведіть самостійно), що

$$a_1|x-1|+a_{2n-1}|x-(2n-1)|\geq 2a_1(n-1).$$

Рівність досягається, коли $x=2n-1$.

Отже,

$$2\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k+1}a_k|x-k|\geq 2d(1-n)+2a_1(n-1),$$

звідки

$$\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k+1}a_k|x-k|\geq (n-1)(a_1-d).$$

Рівність досягається, коли $x=2n-1$.

Зауваження.

- 1) Якщо $a_k = k$, то маємо нерівність (20).
- 2) Як видно з (****), сума $2\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k+1}a_k|x-k|$ не обмежена зверху, тому права частина також не обмежена зверху.

Вправа 60. Довести нерівність:

- 1) $|x-1|-3|x-2|+5|x-3|-7|x-4|+\dots+17|x-9|\geq -4$;
- 2) $|x-1|-4|x-2|+7|x-3|-10|x-4|+\dots+181|x-61|\geq -60$;
- 3) $3|x-1|-5|x-2|+7|x-3|-9|x-4|+\dots+39|x-19|\geq 9$;
- 4) $\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k+1}(4k-1)|x-k|\geq 1-n$.

Вправа 61. Розв'язати рівняння:

- 1) $6|x-1|-11|x-2|+16|x-3|-21|x-4|+ \\ +26|x-5|-31|x-6|+36|x-7|=6$;
- 2) $4|x-1|-7|x-2|+10|x-3|-13|x-4|+\dots+34|x-11|=5$.

Відповідь. 1) $x=7$; 2) $x=11$.

Вправа 62. Довести нерівність

$$\sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k+1} a_n |x - \gamma_k| \geq (n-1)r(a_1 - d),$$

де $\{a_k, k \geq 1\}$ — арифметична прогресія, у якій $a_1 > 0$ і $d > 0$,
 $\{\gamma_k, k \geq 1\}$ — арифметична прогресія, у якій $\gamma_1 > 0$ і різниця $r > 0$.

Указівка. Доведіть нерівність

$$a_k |x - \gamma_k| - 2a_{k+1} |x - \gamma_{k+1}| + a_{k+2} |x - \gamma_{k+2}| \geq -2dr.$$

Вправа 63. Довести нерівність

$$|x-1| - 3|x-5| + 5|x-8| - 7|x-11| + \dots + 25|x-38| \geq -18.$$

Вправа 64. Розв'язати нерівність

$$4|x-3| - 7|x-5| + 10|x-7| - 13|x-9| + \dots + 58|x-39| \geq 18.$$

Відповідь. $x = 39$.

Вправа 65. Довести нерівність:

$$1) \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k+1} (x - \gamma_k) \geq (n-1)r;$$

$$2) \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k+1} k |x - \gamma_k| \geq 0.$$

Тут $\{\gamma_k, k \geq 1\}$ — арифметична прогресія з різницею $r > 0$. Коли досягається рівність у цих нерівностях?

Відповідь. В обох випадках рівність, коли $x = \gamma_{2n-1}$.

Вправа 66. Розв'язати рівняння:

$$1) |x-2| - |x-5| + |x-8| - |x-11| + \dots + |x-26| = 12;$$

$$2) |x-5| - 2|x-9| + 3|x-13| - 4|x-17| + \dots + 10|x-41| = 0.$$

Відповідь. 1) $x = 26$; 2) $x = 41$.

Вправа 67. $\{a_k, k \geq 1\}$ — арифметична прогресія з додатним першим членом і різницею d . Довести нерівність

$$a_1(x-1) - 2a_2|x-2| + a_3|x-3| + a_4|x-4| - 2a_5|x-5| + a_6|x-6| + \dots + a_{3n-2}|x-(3n-2)| - 2a_{3n-1}|x-(3n-1)| + a_{3n}|x-3n| \geq -2dn.$$

Коли досягається рівність у цій нерівності?

Указівка. Скористайтеся лемою з прикладу 55.

Відповідь. Рівність, коли $x = 3n$.

Вправа 68. Розв'язати рівняння

$$2|x-1|-10|x-2|+8|x-3|+11|x-4|-28|x-5|+17|x-6|=-12.$$

Відповідь. $x=6$.

Приклад 56. Довести нерівність

$$a|x-k|-b|x-(k+1)|+c|x-(k+2)|\geq b-2c, \quad (21)$$

де $a>0$, $c>0$, $b=a+c$, $2c\geq b$, $k\in\mathbb{R}$.

Доведення

Позначимо через $f(x)$ ліву частину заданої нерівності. Тоді

- ✓ $f(x)=2c-b\geq 0$, коли $x\leq k$;
- ✓ $f(x)=b-2c\leq 0$, коли $x\geq k+2$;
- ✓ $f(k+1)=a+c>0$.

Найменшим із цих трьох значень є число $b-2c$.

Вивчаючи графік функції $f(x)$, дістанемо

$$\min f(x)=b-2c.$$

Коли $b=2c$, то рівність у (21) досягається при $x\leq k$ або при $x\geq k+2$. Якщо $b<2c$, то рівність у (21) досягається при $x\geq k+2$.

Зауваження. Лема з прикладу 55 є окремими випадком нерівності (21), коли $a=a_k$, $b=2a_{k+1}$, $c=a_{k+2}$ (a_k , a_{k+1} , a_{k+2} — додатні члени зростаючої арифметичної прогресії).

Приклад 57. Довести нерівність

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} F_{k+1} |x-k| \geq 1 - F_{2n-1},$$

де $\{F_k, k\geq 1\}$ — послідовність Фібоначчі.

Доведення

Згідно з прикладом 55, запишемо n нерівностей:

- ✓ $F_1|x-1|-F_3|x-2|+F_2|x-3|\geq F_3-2F_2=F_1-F_2$,
- ✓ $F_3|x-3|-F_5|x-4|+F_4|x-5|\geq F_5-F_4$,
- ✓ ...
- ✓ $F_{2n-1}|x-(2n-1)|-F_{2n+1}|x-2n|+F_{2n}|x-(2n+1)|\geq F_{2n+1}-F_{2n}$.

Коли $x\geq 2n+1$, в усіх нерівностях досягається рівність.

Додавши почленно всі нерівності, матимемо:

$$\begin{aligned} & F_2|x-1| - F_3|x-2| + F_4|x-3| - F_5|x-4| + F_6|x-5| - \dots - \\ & - F_{2n+1}|x-2n| + F_{2n}|x-(2n+1)| \geq \\ & \geq F_1 + (F_3 - F_2) + (F_5 - F_4) + \dots + (F_{2n-1} - F_{2n-2}) - F_{2n} \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} F_{k+1} |x-k| + F_{2n} |x-(2n+1)| \geq \\ & \geq 1 + F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-3} - F_{2n} = 1 + F_{2n-2} - F_{2n} = 1 - F_{2n-1}. \end{aligned}$$

(Використано рівність $F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n-3} = F_{2n-2}$, яку легко довести, записавши замість F_1 число F_2 і згорнувши суму в лівій частині.)

Ураховуючи, що $F_{2n}|x-(2n+1)| = 0$ при $x = 2n+1$, матимемо:

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} F_{k+1} |x-k| \geq 1 - F_{2n-1}.$$

Зауваження. Доведено також, що

$$F_{2n}|x-(2n+1)| + \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} F_{k+1} |x-k| \geq 1 - F_{2n-1}.$$

Вправа 69. Довести нерівність

$$\begin{aligned} & |x-1| - 3|x-2| + 2|x-3| + |x-4| - 3|x-5| + 2|x-6| + \dots + \\ & + |x-(3n-2)| - 3|x-(3n-1)| + 2|x-3n| \geq -n. \end{aligned}$$

Коли досягається рівність у цій нерівності?

Відповідь. Рівність, коли $x \geq 3n$.

Вправа 70. Розв'язати рівняння

$$|x-1| - 4|x-2| + 3|x-3| + |x-4| - 4|x-5| + 3|x-6| = -4.$$

Відповідь. $x \geq 6$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Воробьев Н. Н. Числа Фибоначчи. — М. : Наука, 1978.
2. Голубев В. И. Абсолютная величина числа в конкурсных экзаменах по математике. — Л. : Квантор, 1991.
3. Ушаков Р. П. Знаходження скінченних сум. — Х. : Вид. група «Основа», 2006.
4. Ушаков Р. П. Комбінаторні тотожності. — Х. : Вид. група «Основа», 2004.

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

This image shows a full page of blank, lined paper. It features approximately 28 evenly spaced horizontal grey lines on a white background, typical of notebook paper. There are no margins, text, or other markings on the page.

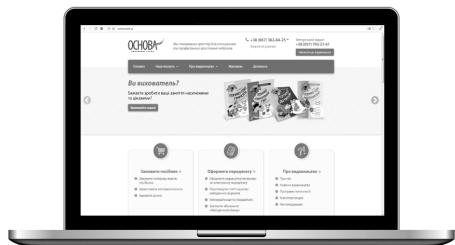
This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Сайт Видавничої групи «Основа» — скарбниця для освітян України!



Протягом 15 років ми створюємо нові проекти, щоб усебічно полегшити працю педагогів та забезпечити їх невідпинне професійне вдосконалення.

Усі проекти та матеріали зібрані на сайті <http://osnova.com.ua> — заходьте та обирайте ті, що наразі цікавлять вас!



Інтернет-магазин

<http://book.osnova.com.ua>

Це посібники, робочі зошити, наочність та інші навчальні матеріали для вчителів усіх предметів, вихователів ДНЗ, адміністраторів.



Передплатна агенція

<http://journal.osnova.com.ua>

Передплатити науково-методичні журнали тут можна на 20 % дешевше, ніж на Укрпошті! Також чимало статей викладені у вільному доступі для ознайомлення.



<http://e-kniga.in.ua>

Магазин літератури для вчителів у сучасному електронному форматі. Після зручної оплати банківською картою чи через СМС ви просто завантажуєте книгу на свій смартфон чи комп'ютер.



<http://d-academy.com.ua>

Ресурс для невідпинної самоосвіти: вебінари, майстер-класи та інтернет-марафони з кращими фахівцями України!

Відвідуйте наш сайт і знаходьте все необхідне для професійної діяльності!

Долучайтесь до наших сторінок у Фейсбукі:

Сторінка Видавничої групи «Основа»: www.facebook.com/OsnovaVG

Сторінка Інтернет-марафону: www.facebook.com/InternetMarafon



Навчальне видання

Бібліотека журналу «Математика в школах України»
Випуск 10 (190)

КУКУШ Олександр Георгійович
УШАКОВ Рудольф Петрович

МАТЕМАТИЧНИЙ ГУРТОК. 10–11 КЛАСИ. ЧИСЛА. ПОСЛІДОВНОСТІ. ФУНКЦІЇ

Навчально-методичний посібник

Головний редактор: *І. С. Маркова*
Відповідальний за видання: *Ю. М. Афанасенко*
Технічний редактор: *Є. С. Островський*
Коректор: *О. М. Журенко*

Підп. до друку 12.10.2018. Формат 60×90/16. Папір офсет.
Гарнітура Шкільна. Друк офсет. Ум. друк. арк. 8,0. Зам. № 18-10/15-04.

ТОВ «Видавнича група “Основа”».
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6058 від 01.03.2018 р.
Україна, 61001 Харків, вул. Плеханівська, 66.
Тел. (057) 731-96-32. E-mail: math@osnova.com.ua

Надруковано у друкарні ТОВ «ТРИАДА-ПАК»
м. Харків, пров. Сімферопольський, 6. Тел. +38(057)703-12-21
www.triada-pack.com, email: sale@triada.kharkov.ua
ISO 9001:2015 № UA228351, FAMO TRIADA LLC (065445)