

Задачі: симетрії, замощення та квазікристали

21 вересня 2026 р.

Рівень 1

Задача 1. Чи можна замостити прямокутник розміром 4×7 клітинок без накладань та прогалин плитками доміно розміром 1×2 ? Відповідь обґрунтуйте.

Розв'язання. Обчислимо загальну площу (кількість одиничних клітинок) прямокутника:

$$S = 4 \times 7 = 28 \text{ клітинок.}$$

Кожна плитка доміно покриває рівно 2 клітинки. Отже, якщо замощення існує, кількість плиток має дорівнювати:

$$N = \frac{28}{2} = 14.$$

Покажемо, що таке замощення справді можна побудувати. Розіб'ємо прямокутник 4×7 на два прямокутники: 4×4 та 4×3 . Кожен стовпчик парної довжини 4 можна розбити на дві вертикальні плитки 1×2 . Оскільки у нашому прямокутнику є 7 таких вертикальних стовпчиків, замощення складається із $7 \times 2 = 14$ вертикально розташованих плиток доміно.

Відповідь: Так, можна. $\square$

Задача 2. Побудуємо послідовність символів за правилом: починаємо з букви A . На кожному наступному кроці кожную букву A замінюємо на AB , а кожную букву B — на A .

а) Запишіть отримані слова на перших чотирьох кроках.

б) Скільки букв міститиме слово на 7-му кроці?

Розв'язання. а) Випишемо слова послідовно:

$$\begin{aligned} S_1 &= A, \\ S_2 &= AB, \\ S_3 &= ABA, \\ S_4 &= ABAAB. \end{aligned}$$

б) Позначимо довжину слова S_n через L_n . З правил підстановки випливає, що кожне слово S_n (починаючи з $n = 3$) утворюється приписуванням слова S_{n-2} до слова S_{n-1} :

$$S_n = S_{n-1}S_{n-2}.$$

Отже, довжини задовольняють співвідношення Фібоначчі: $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$. Обчислимо довжини перших 7 слів:

$$L_1 = 1, \quad L_2 = 2, \quad L_3 = 3, \quad L_4 = 5, \quad L_5 = 8, \quad L_6 = 13, \quad L_7 = 21.$$

Відповідь: б) 21 буква. $\square$

Задача 3. Які з наведених правильних многокутників можуть утворювати однорідний паркет площини (замощувати площину без проміжків фігурами одного виду, що сходяться вершина до вершини):

- а) правильний трикутник;
- б) правильний чотирикутник (квадрат);
- в) правильний п'ятикутник;
- г) правильний шестикутник?

Розв'язання. Для того щоб площину можна було замостити правильними n -кутниками одного виду так, щоб у кожній спільній вершині сходилася ціла кількість $k \geq 3$ кутів, сума цих кутів повинна дорівнювати повному куту 360° .

Кут правильного n -кутника обчислюється за формулою:

$$\alpha_n = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}.$$

Перевіримо задані варіанти:

- а) Для правильного трикутника ($n = 3$): $\alpha_3 = \frac{1 \cdot 180^\circ}{3} = 60^\circ$. Оскільки $360^\circ / 60^\circ = 6 \in \mathbb{N}$, у кожній вершині сходяться 6 трикутників. Замощення можливе.
- б) Для квадрата ($n = 4$): $\alpha_4 = \frac{2 \cdot 180^\circ}{4} = 90^\circ$. Оскільки $360^\circ / 90^\circ = 4 \in \mathbb{N}$, сходяться 4 квадрати. Замощення можливе.
- в) Для правильного п'ятикутника ($n = 5$): $\alpha_5 = \frac{3 \cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ$. Співвідношення $360^\circ / 108^\circ = 10/3 = 3\frac{1}{3} \notin \mathbb{N}$. Оскільки $3 \times 108^\circ = 324^\circ < 360^\circ$, а $4 \times 108^\circ = 432^\circ > 360^\circ$, замостити площину лише п'ятикутниками неможливо.
- г) Для правильного шестикутника ($n = 6$): $\alpha_6 = \frac{4 \cdot 180^\circ}{6} = 120^\circ$. Оскільки $360^\circ / 120^\circ = 3 \in \mathbb{N}$, сходяться 3 шестикутники. Замощення можливе.

Відповідь: а), б), г).

□

Рівень 2

Задача 4. Доведіть, що шахову дошку розміром 8×8 , з якої вирізано дві протилежні по діагоналі кутові клітинки, неможливо замостити 31 плиткою доміно 1×2 .

Розв'язання. Розфарбуємо дошку 8×8 у стандартні чорний і білий кольори в шаховому порядку. Початкова дошка містить 32 білі та 32 чорні клітинки.

Протилежні кутові клітинки завжди мають однаковий колір. Нехай без обмеження загальності вирізано дві білі клітинки. Тоді на дошці залишилося:

$$32 - 2 = 30 \text{ білих клітинок, } 32 \text{ чорні клітинки.}$$

Будь-яка прямокутна плитка доміно розміром 1×2 , як би вона не була розташована (вертикально чи горизонтально), обов'язково покриває рівно одну білу і рівно одну чорну клітинку.

Отже, будь-яке розміщення 31 плитки доміно покриє рівно 31 білу та 31 чорну клітинку. Але наша фігура містить лише 30 білих клітинок. Отримане протиріччя доводить неможливість замощення.

□

Задача 5. Розглянемо слово Фібоначчі S_n , отримане за правилом: $S_1 = A$, $S_2 = AB$, $S_n = S_{n-1}S_{n-2}$ при $n \geq 3$. Нехай a_n — кількість букв A , а b_n — кількість букв B у слові S_n . Знайдіть відношення $\frac{a_n}{b_n}$ для $n = 6$.

Розв'язання. Підрахуємо кількість входжень букв у перших шести словах:

$$\begin{aligned} S_1 = A &\implies a_1 = 1, b_1 = 0; \\ S_2 = AB &\implies a_2 = 1, b_2 = 1; \\ S_3 = ABA &\implies a_3 = 2, b_3 = 1; \\ S_4 = ABAAB &\implies a_4 = 3, b_4 = 2; \\ S_5 = ABAABABA &\implies a_5 = 5, b_5 = 3; \\ S_6 = ABAABABAAB &\implies a_6 = 8, b_6 = 5. \end{aligned}$$

Послідовності кількості букв самі є числами Фібоначчі: $a_n = F_n$, $b_n = F_{n-1}$ (де $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$). Тому шукане відношення для $n = 6$ дорівнює:

$$\frac{a_6}{b_6} = \frac{8}{5} = 1.6.$$

Відповідь: $\frac{8}{5}$.

□

Задача 6. Фігура має поворотну симетрію порядку n , якщо при повороті навколо центра на кут $\frac{360^\circ}{n}$ вона суміщається сама із собою.

- Знайдіть найменший додатний кут повороту, який суміщає правильний п'ятикутник із самим собою.
- Чи існує паралелограм, відмінний від прямокутника і ромба, що має поворотну симетрію порядку 4?

Розв'язання. а) Правильний п'ятикутник має поворотну симетрію порядку $n = 5$. Найменший додатний кут повороту дорівнює:

$$\theta = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ.$$

- Поворотна симетрія 4-го порядку відповідає куту $\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$. Якщо паралелограм суміщається із собою при повороті на 90° , то сторони, що виходять з однієї вершини, при повороті переходять у сусідні взаємно перпендикулярні сторони, тобто всі сторони мають бути рівними (ромб), а всі кути — прямими (прямокутник). Таким чином, єдиним паралелограмом із симетрією 4-го порядку є квадрат.

Відповідь: а) 72° ; б) Ні, не існує.

□

Рівень 3

Задача 7. У правильному п'ятикутнику $ABCDE$ зі стороною 1 проведено діагоналі AC та AD . Знайдіть кути трикутника ACD .

Розв'язання. Внутрішній кут правильного п'ятикутника дорівнює:

$$\angle ABC = \frac{(5-2) \cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ.$$

Трикутник ABC є рівнобедреним ($AB = BC = 1$). Отже, його кути при основі AC рівні:

$$\angle BAC = \angle BCA = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ.$$

Аналогічно, розглядаючи рівнобедрений трикутник AED ($AE = ED = 1$), отримуємо:

$$\angle EAD = \angle EDA = 36^\circ.$$

Обчислимо кут $\angle CAD$:

$$\angle CAD = \angle BAE - \angle BAC - \angle EAD = 108^\circ - 36^\circ - 36^\circ = 36^\circ.$$

Оскільки $AC = AD$ (діагоналі правильного п'ятикутника рівні), трикутник ACD є рівнобедреним з вершиною A . Тоді кути при його основі CD дорівнюють:

$$\angle ACD = \angle ADC = \frac{180^\circ - \angle CAD}{2} = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ.$$

Відповідь: $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$. □

Задача 8. У правильному п'ятикутнику зі стороною $a = 1$ проведено дві діагоналі, які перетинаються всередині. Доведіть, що довжина діагоналі d задовольняє рівняння $d^2 - d - 1 = 0$, і знайдіть точне значення d .

Розв'язання. Нехай у правильному п'ятикутнику $ABCDE$ діагоналі AC та BD перетинаються в точці P . Розглянемо кути:

- $\angle BAC = 36^\circ, \angle BCA = 36^\circ,$
- $\angle CBD = 36^\circ, \angle BDC = 36^\circ.$

У трикутнику BPC : $\angle PBC = 36^\circ, \angle PCB = 36^\circ$, отже, він рівнобедрений, і $BP = PC$. Зовнішній кут до $\triangle BPC$ при вершині P :

$$\angle APB = \angle PBC + \angle PCB = 72^\circ.$$

У трикутнику ABP : $\angle BAP = \angle BAC = 36^\circ$, а $\angle ABP = \angle ABC - \angle PBC = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$. Отже, трикутник ABP є рівнобедреним: $AB = AP = 1$.

Оскільки довжина всієї діагоналі $AC = d$, а $AP = 1$, довжина відрізка PC дорівнює:

$$PC = AC - AP = d - 1.$$

Порівняємо рівнобедрені трикутники $\triangle ABC$ (кути $108^\circ, 36^\circ, 36^\circ$) та $\triangle BPC$ (кути $108^\circ, 36^\circ, 36^\circ$). Вони подібні за трьома кутами:

$$\triangle ABC \sim \triangle BPC.$$

З подібності випливає співвідношення відповідних сторін:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{PC} \implies \frac{d}{1} = \frac{1}{d-1}.$$

Перемножуючи навхрест, отримуємо квадратне рівняння:

$$d(d-1) = 1 \iff d^2 - d - 1 = 0.$$

Корені цього рівняння:

$$d = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Оскільки довжина $d > 0$, вибираємо додатний корінь:

$$d = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi \approx 1.6180339887 \dots$$

Це відношення є золотим перерізом.

Відповідь: $d = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

□

Задача 9. Чи можна площину покрити без перекриттів комбінацією правильних десятикутників, правильних п'ятикутників та ромбів, якщо довжини сторін усіх цих фігур однакові? Знайдіть гострий кут ромба, який підходить для заповнення простору біля спільної вершини з одним десятикутником та одним п'ятикутником.

Розв'язання. Обчислимо внутрішні кути правильного десятикутника ($n = 10$) та п'ятикутника ($n = 5$):

$$\alpha_{10} = \frac{(10-2) \cdot 180^\circ}{10} = \frac{8 \cdot 180^\circ}{10} = 144^\circ,$$

$$\alpha_5 = \frac{(5-2) \cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ.$$

Розглянемо вершину, в якій сходяться один десятикутник, один п'ятикутник та ромб (усі зі стороною a). Сума кутів навколо вершини має дорівнювати 360° :

$$\alpha_{10} + \alpha_5 + \theta_{\text{ромба}} = 360^\circ.$$

Підставляючи значення:

$$144^\circ + 108^\circ + \theta_{\text{ромба}} = 360^\circ \implies 252^\circ + \theta_{\text{ромба}} = 360^\circ \implies \theta_{\text{ромба}} = 108^\circ.$$

Якщо один із кутів ромба дорівнює 108° , то його гострий кут дорівнює:

$$180^\circ - 108^\circ = 72^\circ.$$

Такий ромб є класичним товстим ромбом Пенроуза.

Відповідь: Гострий кут ромба дорівнює 72° .

□

Рівень 4

Задача 10. (Теорема про кристалографічне обмеження на площині). Нехай $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ — плоска ґратка, породжена двома лінійно незалежними векторами. Доведіть, що якщо поворот R_θ на кут $\theta \in (0, \pi]$ навколо початку координат переводить ґратку Λ у себе, то можливими порядками осі симетрії $n = \frac{2\pi}{\theta}$ можуть бути лише $n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$. Зокрема, 5-кратна поворотна симетрія для кристалографічної ґратки неможлива.

Розв’язання. Оскільки ґратка Λ дискретна, існує ненульовий вектор $v_1 \in \Lambda$, який має мінімальну можливу довжину $\|v_1\| = a > 0$.

Припустимо, що ґратка має симетрію повороту на кут θ . Повернемо вектор v_1 на кут θ за годинниковою стрілкою та проти неї:

$$v_2 = R_\theta v_1 \in \Lambda, \quad v_3 = R_{-\theta} v_1 \in \Lambda.$$

Оскільки $v_2, v_3 \in \Lambda$, за лінійністю ґратки їхня різниця (або сума зі знаком) також належить Λ :

$$w = v_2 + v_3 - v_1 \in \Lambda.$$

З геометрії додавання векторів (або в координатній формі, якщо $v_1 = (a, 0)$):

$$v_2 = (a \cos \theta, a \sin \theta), \quad v_3 = (a \cos \theta, -a \sin \theta),$$

отже,

$$v_2 + v_3 = (2a \cos \theta, 0) = (2 \cos \theta) v_1.$$

Тоді вектор w дорівнює:

$$w = (2 \cos \theta - 1) v_1.$$

Вектор w паралельний до v_1 , тому він має бути цілочисельним кратним вектора v_1 (інакше між точками 0 і v_1 з’явився б вектор меншої довжини, що суперечить вибору v_1 як мінімального). Зокрема, довжина $\|w\|$ або дорівнює 0, або $\|w\| \geq \|v_1\| = a$. Вектор $v_2 - v_3$ перпендикулярний, тому зручніше розглянути вектор $u = v_2 - v_3$:

$$\|v_2 - v_3\| = 2a \sin \frac{\theta}{2}.$$

Якщо цей вектор ненульовий, його довжина не може бути меншою за a :

$$2a \sin \frac{\theta}{2} \geq a \implies \sin \frac{\theta}{2} \geq \frac{1}{2} \implies \theta \geq 60^\circ.$$

Крім того, оскільки $v_2 + v_3 = (2 \cos \theta) v_1 \in \Lambda$, число $2 \cos \theta$ має бути цілим числом:

$$2 \cos \theta = m \in \mathbb{Z}.$$

Оскільки $-1 \leq \cos \theta \leq 1$, можливі значення для $m \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$:

- $m = 2 \implies \cos \theta = 1 \implies \theta = 0$ (порядок 1);
- $m = 1 \implies \cos \theta = \frac{1}{2} \implies \theta = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$ (порядок 6);
- $m = 0 \implies \cos \theta = 0 \implies \theta = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$ (порядок 4);
- $m = -1 \implies \cos \theta = -\frac{1}{2} \implies \theta = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$ (порядок 3);
- $m = -2 \implies \cos \theta = -1 \implies \theta = \pi = 180^\circ$ (порядок 2).

Для $n = 5$ кут $\theta = 72^\circ$, а $2 \cos 72^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \notin \mathbb{Z}$, тому $n = 5$ неможливий. $\square$

Задача 11. Аперіодичне замощення Пенроуза РЗ складається з двох типів ромбів із однакою стороною a :

- «товстий ромб» із кутами 72° та 108° ;
- «тонкий ромб» із кутами 36° та 144° .

Знайдіть точне відношення площі товстого ромба до площі тонкого ромба.

Розв'язання. Площа ромба зі стороною a та гострим кутом α дорівнює:

$$S = a^2 \sin \alpha.$$

Для товстого ромба гострий кут $\alpha_1 = 72^\circ$:

$$S_{\text{товст}} = a^2 \sin 72^\circ.$$

Для тонкого ромба гострий кут $\alpha_2 = 36^\circ$:

$$S_{\text{тонк}} = a^2 \sin 36^\circ.$$

Знайдемо відношення площ:

$$\frac{S_{\text{товст}}}{S_{\text{тонк}}} = \frac{a^2 \sin 72^\circ}{a^2 \sin 36^\circ} = \frac{\sin(2 \cdot 36^\circ)}{\sin 36^\circ} = \frac{2 \sin 36^\circ \cos 36^\circ}{\sin 36^\circ} = 2 \cos 36^\circ.$$

Обчислимо точне значення $\cos 36^\circ$. Скористаємося формулою $\sin(5 \cdot 36^\circ) = \sin 180^\circ = 0$. Відомо, що $\cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. Отже:

$$2 \cos 36^\circ = 2 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi.$$

Таким чином, відношення площ точно дорівнює золотому перерізу ϕ .

Відповідь: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. $\square$

Задача 12. Доведіть тотожність для золотого перерізу $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$:

$$\phi^n = F_n \phi + F_{n-1}, \quad \forall n \geq 2,$$

де F_n — числа Фібоначчі ($F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, \dots$).

Розв'язання. Доведемо за допомогою математичної індукції.

База індукції: для $n = 2$: Оскільки ϕ є коренем рівняння $\phi^2 - \phi - 1 = 0$, маємо:

$$\phi^2 = \phi + 1 = 1 \cdot \phi + 1 = F_2 \phi + F_1.$$

Твердження виконується.

Крок індукції: нехай твердження правильне для деякого $k \geq 2$:

$$\phi^k = F_k \phi + F_{k-1}.$$

Помножимо обидві частини рівності на ϕ :

$$\phi^{k+1} = \phi(F_k \phi + F_{k-1}) = F_k \phi^2 + F_{k-1} \phi.$$

Підставимо $\phi^2 = \phi + 1$:

$$\phi^{k+1} = F_k(\phi + 1) + F_{k-1} \phi = (F_k + F_{k-1})\phi + F_k.$$

За означенням чисел Фібоначчі, $F_k + F_{k-1} = F_{k+1}$. Отримуємо:

$$\phi^{k+1} = F_{k+1} \phi + F_k.$$

Індукційний перехід доведено. Твердження справедливе для всіх $n \geq 2$. $\square$

Рівень 5

Задача 13. У процесі інфляції (subdivision) трикутників Робінсона кожен товстий трикутник T_1 розбивається на один товстий T_1 та один тонкий T_2 , а кожен тонкий трикутник T_2 — на один товстий трикутник T_1 і підлягає масштабуванню з коефіцієнтом ϕ .

- а) Запишіть матрицю заміни M , яка задає перетворення вектора кількостей $\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}$.
- б) Знайдіть власні значення матриці M та покажіть, що відношення кількості товстих плиток до тонких у нескінченному замощенні прямує до ϕ .

Розв'язання. а) Правило заміни має вигляд:

$$\begin{cases} N_1^{(k+1)} = 1 \cdot N_1^{(k)} + 1 \cdot N_2^{(k)}, \\ N_2^{(k+1)} = 1 \cdot N_1^{(k)} + 0 \cdot N_2^{(k)}. \end{cases}$$

У матричній формі:

$$\begin{pmatrix} N_1^{(k+1)} \\ N_2^{(k+1)} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} N_1^{(k)} \\ N_2^{(k)} \end{pmatrix}, \quad \text{де } M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- б) Знайдемо власні значення матриці M із характеристичного рівняння $\det(M - \lambda I) = 0$:

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(1 - \lambda) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$

Корені:

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi > 1, \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\phi}, \quad |\lambda_2| < 1.$$

Знайдемо власний вектор, що відповідає домінуючому власному значенню $\lambda_1 = \phi$:

$$\begin{pmatrix} 1 - \phi & 1 \\ 1 & -\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies v_1 - \phi v_2 = 0 \implies \frac{v_1}{v_2} = \phi.$$

За теоремою Перрона–Фробеніуса, при багаторазовому застосуванні оператора M^k напрямок вектора $\begin{pmatrix} N_1^{(k)} \\ N_2^{(k)} \end{pmatrix}$ збігається до власного вектора, тобто відношення кількості плиток:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N_1^{(k)}}{N_2^{(k)}} = \phi.$$

Відповідь: а) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, відношення прямує до ϕ . □

Задача 14. Доведіть, що замощення Пенроуза є строго неперіодичним, тобто не має жодного вектора паралельного переносу $T \neq 0$, який суміщає замощення із самим собою.

Розв'язання. Припустимо супротивне: нехай замощення є періодичним з деяким ненульовим вектором трансляції $T \in \mathbb{R}^2$.

Тоді існує фундаментальна область (паралелограм трансляцій) скінченної площі, яка при періодичних зсувах на вектори ґратки замощує всю площину. Звідси випливає, що глобальна середня густина кількості товстих ромбів N_1 та тонких ромбів N_2 визначається їхньою кількістю у фундаментальній області.

Оскільки у фундаментальній області міститься ціла кількість плиток кожного сорту ($k_1 \in \mathbb{N}$ та $k_2 \in \mathbb{N}$), відношення їхніх кількостей (та відповідних площ) повинно бути раціональним числом:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{k_1}{k_2} \in \mathbb{Q}.$$

Проте з попередньої задачі (властивість інфляції та самоподібності розбиття) граничне відношення кількостей дорівнює:

$$\frac{N_1}{N_2} = \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Число $\sqrt{5}$ є ірраціональним, отже, $\phi \notin \mathbb{Q}$. Отримане протиріччя спростовує припущення про наявність періоду трансляції. Замощення є аперіодичним. $\square$

Задача 15. Розглянемо правильний зірчастий п'ятикутник (пентаграму). Нехай вектори $e_k = (\cos \frac{2\pi k}{5}, \sin \frac{2\pi k}{5})$, де $k = 0, 1, 2, 3, 4$, спрямовані у вершини правильного п'ятикутника. Доведіть тотожність:

$$\sum_{k=0}^4 \cos \left(\frac{2\pi k}{5} \right) = 0.$$

Розв'язання. Розглянемо комплексні числа $z_k = e^{i\frac{2\pi k}{5}}$, де $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Вони є всіма п'ятьма комплексними коренями 5-го степеня з одиниці, тобто задовольняють рівняння:

$$z^5 - 1 = 0.$$

Розкладаючи на множники:

$$(z - 1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0.$$

Оскільки $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{5}} \neq 1$, сума всіх коренів дорівнює:

$$\sum_{k=0}^4 z_k = \sum_{k=0}^4 (z_1)^k = \frac{(z_1)^5 - 1}{z_1 - 1} = \frac{1 - 1}{z_1 - 1} = 0.$$

За формулою Ейлера, $z_k = \cos \left(\frac{2\pi k}{5} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi k}{5} \right)$. Беручи дійсну частину від суми:

$$\operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^4 z_k \right) = \sum_{k=0}^4 \cos \left(\frac{2\pi k}{5} \right) = 0.$$

$\square$

Рівень 6

Задача 16. (Модель проєкції / Cut-and-Project у 1D). Розглянемо цілочисельну ґратку $\mathbb{Z}^2$ на площині з координатами (x, y) . Нехай пряма $E_{\parallel}$ нахилена під ірраціональним кутом з тангенсом нахилу $\tan \alpha = \frac{1}{\phi} = \phi - 1$. Смуґа вікна проєкції W задається проєкцією одиничного квадрата $[0, 1]^2$ на ортогональну пряму $E_{\perp}$. Доведіть, що проєкція точок $\mathbb{Z}^2 \cap W$ на пряму $E_{\parallel}$ утворює ланцюжок відрізків лише двох довжин L (Long) та S (Short), причому $\frac{L}{S} = \phi$.

Розв’язання. Нехай базисні вектори ґратки $\mathbb{Z}^2$ є $e_1 = (1, 0)$ та $e_2 = (0, 1)$. Пряма $E_{\parallel}$ задається одиничним вектором:

$$u_{\parallel} = (\cos \alpha, \sin \alpha),$$

а перпендикулярна до неї пряма $E_{\perp}$ задається вектором:

$$u_{\perp} = (-\sin \alpha, \cos \alpha).$$

Оскільки кут нахилу задовольняє $\tan \alpha = \frac{1}{\phi}$, маємо:

$$\cos \alpha = \frac{\phi}{\sqrt{1 + \phi^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \phi^2}}.$$

Кожен крок між сусідніми точками ґратки $\mathbb{Z}^2$, що проєктуються в полосу, відповідає зсуву або на e_1 , або на e_2 . Довжини проєкцій базисних векторів на паралельний простір $E_{\parallel}$ дорівнюють скалярним добуткам:

$$L = \langle e_1, u_{\parallel} \rangle = \cos \alpha,$$

$$S = \langle e_2, u_{\parallel} \rangle = \sin \alpha.$$

Оскільки жоден внутрішній крок не може перестрибнути границю полоси без зсуву на один із базисних кроків ґратки, сусідні спроєктовані точки на прямій $E_{\parallel}$ завжди знаходяться на відстанях, що є проєкціями одиничних кроків, тобто або L , або S . Знайдемо їхнє відношення:

$$\frac{L}{S} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{1/\phi} = \phi.$$

Таким чином, послідовність проєкцій утворює одновимірний квазікристал (ланцюжок Фібоначчі) з двома відстанями, відношення яких дорівнює золотому перерізу. $\square$

Задача 17. Розглянемо динамічну систему поворотів кола: $x_{n+1} = \{x_n + \alpha\}$, де $\{t\}$ — дробова частина числа, а $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ — ірраціональне число. Доведіть, що послідовність точок $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ є скрізь щільною на відрізку $[0, 1]$, але ніколи не є періодичною.

Розв’язання. 1. Неперіодичність: Припустимо, що існують такі цілі $n > m$, що $x_n = x_m$. За формулою $x_n = \{x_0 + n\alpha\}$, це означає:

$$\{x_0 + n\alpha\} = \{x_0 + m\alpha\} \iff (x_0 + n\alpha) - (x_0 + m\alpha) = k \in \mathbb{Z}.$$

Звідси:

$$(n - m)\alpha = k \implies \alpha = \frac{k}{n - m}.$$

Оскільки $n \neq m$, число α мало б бути раціональним. Але $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \notin \mathbb{Q}$. Отримане протиріччя доводить, що всі елементи послідовності $\{x_n\}$ попарно різні, а отже, послідовність неперіодична.

2. Всюди щільність (Теорема Діріхле / Якобі): Оскільки множина значень $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ нескінченна і міститься в компактному відрізку $[0, 1]$, для довільного $\varepsilon > 0$ розіб'ємо $[0, 1]$ на скінченну кількість інтервалів довжини менше ε . За принципом Діріхле, в один з інтервалів потраплять щонайменше дві різні точки x_{n_1} та x_{n_2} ($n_1 > n_2$). Тоді відстань між ними:

$$\delta = |x_{n_1} - x_{n_2}| = |\{(n_1 - n_2)\alpha\}| < \varepsilon.$$

Зсув на величину $\delta \neq 0$ генерує ланцюжок точок, який «крокує» по колу з кроком, меншим за ε . Отже, у будь-який інтервал $(a, b) \subset [0, 1]$ потрапляє хоча б одна точка траєкторії, що й доводить всюди щільність. $\square$

Задача 18. Нехай послідовність чисел задана як $u_n = \cos(2\pi n\phi)$, де $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Доведіть, що послідовність $\{u_n\}$ не має границі при $n \rightarrow \infty$.

Розв'язання. Припустимо, що границя існує і дорівнює $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(2\pi n\phi)$. Скористаємося тригонометричною тотожністю:

$$\cos(2\pi(n+1)\phi) + \cos(2\pi(n-1)\phi) = 2\cos(2\pi n\phi)\cos(2\pi\phi).$$

Переходячи до границі при $n \rightarrow \infty$ в обох частинах:

$$A + A = 2A\cos(2\pi\phi) \implies 2A(1 - \cos(2\pi\phi)) = 0.$$

Оскільки $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \notin \mathbb{Q}$, число $2\pi\phi$ не є кратним 2π , тому $\cos(2\pi\phi) \neq 1$. Отже, єдиним можливим значенням є $A = 0$.

З іншого боку, скористаємося тотожністю:

$$\cos(4\pi n\phi) = 2\cos^2(2\pi n\phi) - 1.$$

Переходячи до границі при $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(4\pi n\phi) = 2A^2 - 1.$$

Оскільки границя послідовності $\cos(2\pi k(2\phi))$ для ірраціонального 2ϕ за аналогічними міркуваннями повинна була б також дорівнювати 0, отримуємо:

$$0 = 2(0)^2 - 1 = -1,$$

що є очевидною суперечністю. Отже, послідовність $\{u_n\}$ коливається і границі не має. $\square$

Рівень 7

Задача 19. (Матричне виведення кристалографічного обмеження в $\mathbb{R}^n$). Нехай поворот евклідового простору $\mathbb{R}^2$ навколо початку координат зберігає деяку двовимірну ґратку Λ .

- а) Доведіть, що матриця цього повороту в базисі ґратки є цілочисельною, тобто $A \in \text{GL}(2, \mathbb{Z})$.

б) Використовуючи інваріантність сліду оператора відносно вибору базису, отримайте умову на слід матриці $\text{Tr}(A)$ та знайдіть усі можливі кути повороту.

Розв'язання. а) Нехай $\{v_1, v_2\}$ — базис ґратки Λ . Будь-який вузол ґратки записується як $x = c_1 v_1 + c_2 v_2$, де $c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$. Якщо лінійний оператор R_θ переводить Λ у себе, то образи базисних векторів повинні належати цій самій ґратці:

$$R_\theta(v_1) = a_{11}v_1 + a_{21}v_2, \quad R_\theta(v_2) = a_{12}v_1 + a_{22}v_2,$$

де всі коефіцієнти $a_{ij} \in \mathbb{Z}$. Отже, в базисі ґратки матриця оператора $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ має цілі елементи: $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$.

б) В ортонормованому евклідовому базисі оператор повороту на кут θ має матрицю:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Слід матриці Tr є інваріантом оператора і не залежить від вибору базису:

$$\text{Tr}(A) = \text{Tr}(R_\theta) = \cos \theta + \cos \theta = 2 \cos \theta.$$

Оскільки матриця A цілочисельна, її слід обов'язково є цілим числом:

$$\text{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} \in \mathbb{Z} \implies 2 \cos \theta = m \in \mathbb{Z}.$$

Оскільки $|\cos \theta| \leq 1$, можливі значення $m \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, що дає:

$$\cos \theta \in \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\} \implies \theta \in \left\{\pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, 0\right\}.$$

Це відповідає порядкам осей симетрії $n \in \{2, 3, 4, 6, 1\}$.

Відповідь: $\text{Tr}(A) = 2 \cos \theta \in \mathbb{Z}$; порядки симетрії 1, 2, 3, 4, 6. □

Задача 20. (Дифракційний пік Брегґа для одновимірного ланцюжка). Нехай сукупність атомів розташована в точках $x_n = n + \varepsilon_n$, де ε_n — періодична або квазіперіодична функція. Інтенсивність дифракції визначається квадратом модуля структурного фактора:

$$I(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left| \sum_{n=1}^N e^{ikx_n} \right|^2.$$

Обчисліть $I(k)$ для ідеальної періодичної ґратки $x_n = n \cdot a$ та покажіть, що піки виникають тоді й лише тоді, коли хвильовий вектор k належить оберненій ґратці: $k = \frac{2\pi m}{a}$, $m \in \mathbb{Z}$.

Розв'язання. Підставимо $x_n = na$ у формулу суми:

$$S_N(k) = \sum_{n=1}^N e^{ikna} = \sum_{n=1}^N (e^{ika})^n.$$

Це сума геометричної прогресії з першим членом $q = e^{ika}$ та знаменником q . Якщо $ka = 2\pi m$ ($m \in \mathbb{Z}$), то $e^{ika} = 1$, тому:

$$S_N(k) = \sum_{n=1}^N 1 = N.$$

Тоді інтенсивність у точках бреггівських максимумів:

$$I(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} |N|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} N = \infty \quad (\text{у сенсі дельта-функції Дірака } \delta(k - 2\pi t/a)).$$

Якщо ж $ka \neq 2\pi t$, то $q \neq 1$, і за формулою суми:

$$S_N(k) = e^{ika} \frac{1 - e^{iNka}}{1 - e^{ika}}.$$

Оцінимо модуль суми зверху:

$$|S_N(k)| \leq \frac{|1 - e^{iNka}|}{|1 - e^{ika}|} \leq \frac{2}{|1 - e^{ika}|} = \frac{1}{|\sin(ka/2)|} = C(k) < \infty.$$

Тоді границя для інтенсивності дорівнює:

$$I(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} |S_N(k)|^2 \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{C(k)^2}{N} = 0.$$

Отже, дифракційна картина складається з гострих точкових бреггівських піків при $k \in \frac{2\pi}{a}\mathbb{Z}$. $\square$

Задача 21. Розглянемо проєкцію 5-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^5$ з канонічним базисом $\{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ на двовимірний простір $E_{||} \cong \mathbb{C}$. Лінійний проєктор задається відображенням базисних векторів:

$$\pi_{||}(e_j) = \zeta^j, \quad \text{де } \zeta = e^{i\frac{2\pi}{5}}, \quad j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

- а) Доведіть, що операція циклічного зсуву координат у $\mathbb{R}^5$ (перестановка $e_j \mapsto e_{j+1 \pmod{5}}$) відповідає повороту на кут 72° у фізичному просторі $E_{||}$.
- б) Покажіть, чому це дозволяє квазікристалу обійти класичне кристалографічне обмеження в $\mathbb{R}^2$.

Розв'язання. а) Нехай довільний вектор $x \in \mathbb{R}^5$ має вигляд $x = \sum_{j=0}^4 x_j e_j$. Його образ у площині $E_{||} \cong \mathbb{C}$ дорівнює:

$$z = \pi_{||}(x) = \sum_{j=0}^4 x_j \zeta^j.$$

Розглянемо лінійний оператор циклічного зсуву $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$, що діє на базис як $T(e_j) = e_{j+1 \pmod{5}}$. Знайдемо проєкцію зміщеного вектора $T(x) = \sum_{j=0}^4 x_j e_{j+1}$:

$$\pi_{||}(T(x)) = \sum_{j=0}^4 x_j \zeta^{j+1} = \zeta \cdot \left(\sum_{j=0}^4 x_j \zeta^j \right) = \zeta \cdot \pi_{||}(x).$$

Множення комплексного числа на $\zeta = e^{i\frac{2\pi}{5}}$ геометрично є поворотом площини на кут $\frac{2\pi}{5} = 72^\circ$.

- б) Кристалографічне обмеження забороняє поворот 5-го порядку лише для **двовимірних** трансляційних ґраток. У просторі $\mathbb{R}^5$ оператор T є простою матрицею перестановок:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{GL}(5, \mathbb{Z}),$$

яка є абсолютно дозволеною цілочисельною матрицею зі слідом $\text{Tr}(T) = 0 \in \mathbb{Z}$. Квазікристал не є трансляційно-періодичною ґраткою в $\mathbb{R}^2$, а є перетином або проєкцією періодичної ґратки $\mathbb{Z}^5$ із простору вищої вимірності на ірраціонально нахилений підпростір. Таким чином, симетрія 5-го порядку виникає природно без порушення законів періодичності в просторі $\mathbb{R}^5$.

□