

Точкові симетрії і точні розв'язки бездисперсійного рівняння Нижника

Олександра О. ВІННИЧЕНКО

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

E-mail: oleksandra.vinnichenko@imath.kiev.ua

ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-8089-8162>

Отримано 2 квітня 2025, у фінальній формі 20 червня 2025

<https://doi.org/10.3842/confKAU.2025.math.03>

Анотація. Обговорено зв'язки між різними системами і рівняннями Нижника та історію їх виникнення. Основну увагу зосереджено на огляді отриманих раніше результатів класичного симетрійного аналізу бездисперсійного рівняння Нижника. Воно виявилось особливим у багатьох аспектах з точки зору своїх чудових алгебраїчних та геометричних властивостей. Описано побудову псевдогруп точкових і контактних симетрій цього рівняння та псевдогруп точкових симетрій його нелінійного представлення Лакса і бездисперсійної системи Нижника за допомогою оригінальної версії алгебраїчного методу на основі мегаідеалів. Знайдено цікаві алгебраїчні та геометричні властивості бездисперсійного рівняння Нижника. Проведена повна класифікація ліївських редукцій цього рівняння дозволила знайти його точні інваріантні розв'язки у замкненій формі — явний, неявний чи параметричний. Найцікавіші з цих розв'язків наведено в огляді.

Ключові слова: бездисперсійне рівняння Нижника; псевдогрупа точкових симетрій; псевдогрупа контактних симетрій; алгебра ліївської інваріантності; мегаідеал; ліївська редукція; інваріантні розв'язки; приховані симетрії

1 Вступ

Ліївські симетрії — це найпростіші об'єкти, які пов'язані з системою $\mathcal{L}$ диференціальних рівнянь у контексті групового аналізу диференціальних рівнянь. Вони складають зв'язну компоненту G_{id} тотального перетворення у (псевдо)групі точкових симетрій G системи $\mathcal{L}$, яку називають (псевдо)групою ліївської симетрії системи $\mathcal{L}$. Інфінітезимальним аналогом (псевдо)групи G_{id} є максимальна (псевдо)алгебра ліївської інваріантності $\mathfrak{g}$ системи $\mathcal{L}$ диференціальних рівнянь, яку утворюють векторні поля ліївської симетрії системи $\mathcal{L}$. Метод обчислення (псевдо)групи G_{id} є досить алгоритмічним і був запропонований норвезьким математиком Софусом Лі (1842–1899) у 80–90-х роках XIX століття. У рамках інфінітезимального ліївського підходу пошук (псевдо)групи G_{id} зводиться до пошуку (псевдо)алгебри $\mathfrak{g}$ на основі критерію інфінітезимальної інваріантності. Застосування цього критерію дає систему визначальних рівнянь для компонент векторних полів ліївської симетрії системи $\mathcal{L}$, яка є лінійною перевизначеною системою диференціальних рівнянь з частинними похідними і тому часто може бути повністю інтегрована. Завдяки своїй алгоритмічності процедура знаходження таких систем та їх розв'язання може бути реалізована за допомогою символьних обчислень на комп'ютерах. Для цього існує ряд спеціалізованих пакетів у різних системах комп'ютерної алгебри, наприклад такі як пакет **PDEtools**, вбудований в **Maple**, а також пакети **DESOLV** і **Jets** для **Maple**. Тим не менш, принаймні деякі з цих пакетів іноді пропускають частину чи видають неправильні ліївські симетрії або навіть не можуть правильно отримати відповідну систему визначальних рівнянь, і ситуація додатково погіршується при вивченні класу систем диференціальних рівнянь замість однієї системи. Після знаходження (псевдо)алгебри $\mathfrak{g}$ (псевдо)групу G_{id} можна побудувати шляхом розв'язання ліївських рівнянь з породжуючими елементами (псевдо)алгебри $\mathfrak{g}$ і композиції отриманих однопараметри-

чних підгруп. Незважаючи на зрозумілість підходу точне знаходження (псевдо)групи G_{Id} з (псевдо)алгебри $\mathfrak{g}$ все ж є нетривіальною проблемою; див. обговорення ліївських симетрій $(1+1)$ -вимірного лінійного рівняння теплопровідності в [14, Section 3]. Побудова повної (псевдо)групи точкових симетрій G системи $\mathcal{L}$ включно з дискретними симетріями є значно складнішою задачею, яку розв'язують зовсім іншими методами — прямим чи алгебраїчним. У літературі існують різноманітні версії і модифікації цих методів, які застосовано до низки важливих моделей математичної фізики [2, 4, 5, 10, 12–14, 16, 19].

Ліївські редукції дають основний спосіб використання ліївських симетрій для знаходження точних розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними. Оскільки алгебри ліївської інваріантності моделей, які розглядають в математичній фізиці, як правило, досить широкі, це також є найбільш універсальним способом побудови точних розв'язків таких моделей, особливо нелінійних. Багато робіт, присвячених цій темі, було опубліковано протягом кількох останніх десятиліть, але правильні та всебічні дослідження ліївських редукцій та відповідних редукованих систем для конкретних систем диференціальних рівнянь з частинними похідними є скоріше винятковими, особливо у випадку більш ніж двох незалежних змінних; див., наприклад, [7, 8, 12, 16, 23, 28].

Ця стаття є оглядом отриманих в [4, 30, 31] результатів щодо точкових симетрій, класифікації ліївських редукцій і побудови точних інваріантних розв'язків бездисперсійного аналога

$$u_{txy} = (u_{xx}u_{xy})_x + (u_{xy}u_{yy})_y \quad (1)$$

(дійсного симетричного потенціального) рівняння Нижника для оригінальної системи Нижника [18, Eq. (4)], який у [4] названо бездисперсійним рівнянням Нижника. Правильне найменування рівняння (1) є важливим, оскільки, зокрема, його алгебраїчні та геометричні властивості залежать від поля (дійсного чи комплексного), яке пробігають змінні. Тому в параграфі 2 перераховано різні системи та рівняння, які так чи інакше можна пов'язати з оригінальною системою Нижника, а також наведено назви рівняння (1), які зустрічаються у літературі, та причини плутанини в термінології. У параграфі 3 увагу зосереджено на описі цікавих алгебраїчних та геометричних властивостей рівняння (1), його нелінійного представлення Лакса та відповідної (дійсної симетричної) бездисперсійної системи Нижника. Класифікацію ліївських редукцій рівняння (1) з використанням цих властивостей описано в параграфі 4, де також наведено найцікавіші з побудованих точних інваріантних розв'язків цього рівняння разом з його неінваріантними розв'язками, отриманими за допомогою мультиплікативного розділення змінних. Параграф 5 містить висновки до виконаного огляду.

2 Системи і рівняння Нижника

Можна вважати, що історія рівняння (1) розпочалася у 1980 році зі статті Леоніда Павловича Нижника [18]. Оригінальна система Нижника

$$\begin{aligned} w_t &= k_1 w_{xxx} + k_2 w_{yyy} + 3(v^1 w)_x + 3(v^2 w)_y, \\ v_y^1 &= k_1 w_x, \quad v_x^2 = k_2 w_y \end{aligned} \quad (2)$$

з цієї статті містить два параметри k_1 і k_2 з $(k_1, k_2) \neq (0, 0)$. Насправді, суттєвим є лише те, чи дорівнює нулю їх добуток, тобто розрізняють два випадки: симетричний з $k_1 k_2 \neq 0$ та асиметричний з $k_1 k_2 = 0$. Масштабними перетвореннями і — у другому випадку — перестановкою змінних пару (k_1, k_2) можна відповідно відкалібрувати в $(k_1, k_2) = (1, 1)$ і $(k_1, k_2) = (1, 0)$. Через введення потенціалів та/або граничні переходи за малим параметром, введеним за допомогою масштабування, з системи (2) виникають різноманітні пов'язані з нею системи та рівняння:

- (симетричне потенціальне) рівняння Нижника
 $u_{txy} = u_{xxxxy} + u_{xyyyy} + 3(u_{xx}u_{xy})_x + 3(u_{yy}u_{xy})_y;$
- асиметричне (потенціальне) рівняння Нижника, яке також називають рівнянням Бойті–Леона–Манна–Пемпінеллі у зв'язку з його першою появою у явному вигляді в [3],
 $u_{ty} = u_{xxxy} + 3(u_xu_y)_x;$
- (симетрична) бездисперсійна система Нижника
 $w_t = (v^1w)_x + (v^2w)_y, \quad v_y^1 = w_x, \quad v_x^2 = w_y;$
- (симетричне потенціальне) бездисперсійне рівняння Нижника (1);
- асиметрична бездисперсійна система Нижника $w_t = (v^1w)_x, \quad v_y^1 = w_x;$
- асиметричне (потенціальне) бездисперсійне рівняння Нижника $u_{ty} = (u_xu_y)_x.$

Важливо чітко вказати, які поля пробігають незалежні та залежні змінні цих рівнянь чи систем. Їх можна розглядати за припущення, що всі їхні змінні є або дійсними, або комплексними, або невідомі функції є комплекснозначними функціями дійсних незалежних змінних. Тоді відповідні системи або рівняння Нижника називають дійсними, комплексними або частково комплексними. У літературі існує і більш специфічна версія інтерпретації змінних у системах або рівняннях Нижника. А саме, в [29, Eq. (5)] розглянуто симетричну систему Нижника

$$v_t = v_{zzz} + v_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}} + (wv)_z + (\bar{w}v)_{\bar{z}}, \quad w_{\bar{z}} = -3v_z,$$

де $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, $\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$, $\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$, $w = w^1 + iw^2$, а v , w^1 і w^2 є дійсними функціями дійсних змінних (t, x, y) . Введення потенціалів зводить бездисперсійний аналог цієї системи

$$v_t = (wv)_z + (\bar{w}v)_{\bar{z}}, \quad w_{\bar{z}} = -3v_z$$

до одного рівняння

$$\Delta u_t = \frac{1}{2}((u_{yy} - u_{xx})\Delta u)_x + (u_{xy}\Delta u)_y, \quad (3)$$

де u є дійсною функцією від (t, x, y) , а $\Delta := \partial_x^2 + \partial_y^2$ — двовимірний оператор Лапласа.

У роботах [4, 30, 31] розглянуто повністю дійсний випадок симетричного потенціального бездисперсійного рівняння Нижника (1); властивості аналогічного комплексного чи частково комплексного рівняння, а також рівняння (3) є істотно іншими в багатьох аспектах, зокрема щодо дискретних симетрій.

Рівняння (1) вперше з'явилося в еквівалентному вигляді в [11, Eq. (63)], де зауважено, що це “бездисперсійна границя рівняння Нижника–Новікова–Веселова”. У [22], де виведено нелінійне зображення Лакса цього рівняння, його названо симетричним бездисперсійним рівнянням Веселова–Новікова. Цю ж назву використано і в [17].

Фактично, до [4, 30, 31] правильний і вичерпний симетрійний аналіз не було виконано для жодного рівняння та жодної системи Нижника. Здійснені спроби зазвичай були невдалими, оскільки не приводили до повних і достовірних результатів. З огляду на статтю [17], де лише частково проведено класичний симетрійний аналіз бездисперсійного рівняння Нижника з низкою недоліків, було вирішено зосередитися саме на цьому рівнянні і виконати його симетрійний аналіз правильно, вичерпно й оптимально, застосовуючи широкий набір сучасних методів симетрійного аналізу та використовуючи коректну термінологію.

3 Алгебраїчні та геометричні властивості

На першому етапі класичного симетрійного аналізу бездисперсійного рівняння Нижника (1) вивчено структуру його (нескінченновимірної) максимальної псевдоалгебри лівської інваріантності $\mathfrak{g}$, яка є лінійною оболонкою векторних полів

$$\begin{aligned} D^t(\tau) &= \tau \partial_t + \frac{1}{3} \tau_t x \partial_x + \frac{1}{3} \tau_t y \partial_y - \frac{1}{18} \tau_{tt} (x^3 + y^3) \partial_u, & D^s &= x \partial_x + y \partial_y + 3u \partial_u, \\ P^x(\chi) &= \chi \partial_x - \frac{1}{2} \chi_t x^2 \partial_u, & P^y(\rho) &= \rho \partial_y - \frac{1}{2} \rho_t y^2 \partial_u, \\ R^x(\alpha) &= \alpha x \partial_u, & R^y(\beta) &= \beta y \partial_u, & Z(\sigma) &= \sigma \partial_u, \end{aligned} \quad (4)$$

де параметр-функції $\tau, \chi, \rho, \alpha, \beta$ і σ пробігають множину гладких функцій від t . Зокрема, побудовано усі мегаідеали цієї псевдоалгебри $\mathfrak{g}$ [4, Section 2]; щодо означення мегаідеалів та їхніх властивостей див. [1, 24]. Окрім цього, вивчено структуру максимальних псевдоалгебр лівської інваріантності відповідного нелінійного представлення Лакса

$$v_t = \frac{1}{3} \left(v_x^3 - \frac{u_{xy}^3}{v_x^3} \right) + u_{xx} v_x - \frac{u_{xy} u_{yy}}{v_x}, \quad v_y = -\frac{u_{xy}}{v_x} \quad (5)$$

рівняння (1) та бездисперсійного аналога (див. §2)

$$p_t = (h^1 p)_x + (h^2 p)_y, \quad h_y^1 = p_x, \quad h_x^2 = p_y \quad (6)$$

оригінальної симетричної системи Нижника, який називають бездисперсійною системою Нижника, і побудовано достатні множини мегаідеалів цих псевдоалгебр, основними з яких є їх радикали [4, Sections 6, 7].

Алгебраїчний метод знаходження (псевдо)груп точкових симетрій систем диференціальних рівнянь на основі мегаідеалів їхніх максимальних (псевдо)алгебр лівської інваріантності був запропонований в [2] і далі розвинутий і застосований до деяких важливих систем диференціальних рівнянь в [4–6, 16, 19]. Суттєвою частиною такого розвитку було винайдення нових технік для побудови мегаідеалів алгебри Лі без знання її групи автоморфізмів [1, 2, 5, 24]. У [4, Lemma 10] для побудови одного з мегаідеалів максимальної псевдоалгебри лівської інваріантності системи (5) розроблено новий підхід, який повністю відрізняється від існуючих, що використовуються для тієї ж мети.

Застосовуючи оригінальну версію алгебраїчного методу на основі мегаідеалів з [16], обчислено псевдогрупи точкових симетрій G, G_L і G_{dN} бездисперсійного рівняння Нижника (1), його нелінійного представлення Лакса (5) та бездисперсійної системи Нижника (6), а також псевдогрупу контактної симетрії G_c цього рівняння, що є першим у літературі використанням версії алгебраїчного методу на основі мегаідеалів для знаходження (псевдо)групи контактних симетрій диференціального рівняння.

Теорема 1. (i) Псевдогрупу G точкових симетрій бездисперсійного рівняння Нижника (1) породжують перетворення вигляду

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= T(t), \quad \tilde{x} = CT_t^{1/3} x + X^0(t), \quad \tilde{y} = CT_t^{1/3} y + Y^0(t), \\ \tilde{u} &= C^3 u - \frac{C^3 T_{tt}}{18 T_t} (x^3 + y^3) - \frac{C^2}{2 T_t^{1/3}} (X_t^0 x^2 + Y_t^0 y^2) + W^1(t)x + W^2(t)y + W^0(t) \end{aligned} \quad (7)$$

разом з перетворенням $\mathcal{J}: \tilde{t} = t, \tilde{x} = y, \tilde{y} = x, \tilde{u} = u$. Усі параметр-функції T, X^0, Y^0, W^0, W^1 і W^2 є довільними гладкими функціями від змінної t з $T_t \neq 0$, а C — довільна ненульова стала.

(ii) Псевдогрупа G_c контактних симетрій бездисперсійного рівняння Нижника (1) збігається з першим продовженням $G_{(1)}$ псевдогрупи G .

Наслідок 2. Повний список дискретних перетворень точкових симетрій рівняння (1), що є незалежними з точністю до композиції один з одним і з неперервними перетвореннями точкових симетрій цього рівняння, вичерпується трьома комутуючими інволюціями, в якості яких можна вибрати перестановку $\mathcal{J}$ змінних x і y , $(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{u}) = (t, y, x, u)$ та два перетворення $\mathcal{I}^1: (\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{u}) = (-t, -x, -y, u)$ і $\mathcal{I}^s: (\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{u}) = (t, -x, -y, -u)$, що відповідно змінюють знаки (t, x, y) і (x, y, u) .

Особливо цікаво, що цей приклад є по-справжньому унікальним. Показано, що необхідна алгебраїчна умова $\Phi_*\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{g}$ для будь-якого $\Phi \in G$, де $\Phi_*\mathfrak{g}$ — підняття псевдоалгебри $\mathfrak{g}$ перетворенням Φ , повністю її визначає. Інакше кажучи, псевдогрупа G точкових симетрій бездисперсійного рівняння Нижника (1) співпадає зі стабілізатором максимальної псевдоалгебри $\mathfrak{g}$ лівської інваріантності цього рівняння у псевдогрупі локальних дифеоморфізмів у просторі з координатами (t, x, y, u) . Це дало перший приклад системи диференціальних рівнянь з такою властивістю в літературі. Навіть нелінійне представлення Лакса (5) рівняння (1) [4, Theorem 11] та бездисперсійна система Нижника (6) [4, Theorem 14] цієї властивості не мають.

На відміну від неперервних перетворень точкових симетрій, не всі дискретні перетворення точкових симетрій рівняння (1) можна поширити на нелінійне представлення Лакса (5). У той же час, крім очікуваних точкових симетрій простих зсувів по v , система (5) допускає як точкову симетрію дискретне перетворення зміни знаку v .

При застосуванні оригінальної версії алгебраїчного методу на основі мегаідеалів базову умову $\Phi_*Q \in \mathfrak{m}$, де $\mathfrak{m}$ — це мінімальний мегаідеал псевдоалгебри $\mathfrak{g}$, що містить векторне поле Q , розширено лише для одинадцяти (лінійно незалежних) векторних полів з нескінченновимірної псевдоалгебри $\mathfrak{g}$. Ці векторні поля породжують 11-вимірну підалгебру $\mathfrak{s}$ псевдоалгебри $\mathfrak{g}$, яка має таку цікаву властивість:

Означення 3. Власну підалгебру $\mathfrak{s}$ алгебри Лі $\mathfrak{a}$ векторних полів називають *підалгеброю*, що визначає дифеоморфізми, які стабілізують алгебру $\mathfrak{a}$, якщо умови $\Phi_*\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}$ і $\Phi_*\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{a}$ еквівалентні для будь-якого локального дифеоморфізму Φ у базовому просторі.

Для кращого розуміння загальних основ алгебраїчного методу перевірено, чи підалгебри максимальної псевдоалгебри лівської інваріантності $\mathfrak{g}$ бездисперсійного рівняння Нижника (1), що природним чином виникають під час обчислення псевдогрупи G , визначають дифеоморфізми, що стабілізують цю алгебру або її перше продовження [4, Sections 4, 5].

Хоча максимальна псевдоалгебра лівської інваріантності $\mathfrak{g}$ рівняння (1) вичерпно визначає псевдогрупу точкових симетрій G цього рівняння, вона не визначає вичерпно саме рівняння. Тим не менше, щоб виокремити рівняння (1) із усієї сукупності диференціальних рівнянь третього порядку з трьома незалежними змінними, достатньо доповнити $\mathfrak{g}$ -інваріантність кількома гарними умовами [4, Section 8].

Лема 4. Диференціальне рівняння з частинними похідними порядку не вище трьох з трьома незалежними змінними інваріантне відносно псевдоалгебри $\mathfrak{g}$ тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд

$$u_{txy} = (u_{xx}u_{xy})_x + (u_{xy}u_{yy})_y + u_{xy}u_{xyy}H(\omega_1, \omega_2), \quad \omega_1 := \frac{u_{xxx} - u_{yyy}}{u_{xy}}, \quad \omega_2 := \frac{u_{xy}}{u_{xy}}, \quad (8)$$

де H — довільна гладка функція своїх аргументів.

Лема 5. (i) Рівняння вигляду (8) допускає характеристику 1 закону збереження, тобто воно є в збережній формі, тоді і тільки тоді, коли H — афінна функція від (ω_1, ω_2) , тобто, $H = a\omega_1 + b\omega_2 + c$ для деяких сталих a, b, c , і рівняння набуває вигляду

$$u_{txy} = (u_{xx}u_{xy})_x + (u_{xy}u_{yy})_y + u_{xy}(a(u_{xxx} - u_{yyy}) + bu_{xyy} + cu_{xyy}). \quad (9)$$

(ii) Рівняння вигляду (9) допускає характеристику u_{xx} або u_{yy} закону збереження тоді і тільки тоді, коли відповідно $a = b = 0$ або $a = c = 0$.

З останніх двох лем впливає така теорема.

Теорема 6. Диференціальне рівняння з частинними похідними порядку $r \in \{1, 2, 3\}$ з трьома незалежними змінними допускає псевдоалгебру $\mathfrak{g}$ як свою алгебру ліївської інваріантності і характеристики 1, u_{xx} і u_{yy} законів збереження тоді і тільки тоді, коли воно збігається з бездисперсійним рівнянням Нижника (1).

4 Ліївські редукції та точні розв'язки

Незважаючи на велику кількість робіт, присвячених побудові точних розв'язків систем диференціальних рівнянь з частинними похідними за допомогою процедури ліївської редукції, кількість робіт з правильними, відповідними та систематичними дослідженнями ліївської редукції для окремих важливих та цікавих систем, що моделюють явища реального світу, не така велика, як можна було б очікувати. Такі дослідження вимагають громіздких обчислень і точного розгляду багатьох нееквівалентних випадків. Тому, передумовою успішного виконання вищевказаної процедури є її оптимізація. Оптимізовану процедуру ліївської редукції для випадку трьох незалежних змінних описано в [31, Section 2].

Використовуючи результати [4] щодо максимальних псевдоалгебр ліївської інваріантності $\mathfrak{g}$ та $\mathfrak{g}_L$ бездисперсійного рівняння Нижника (1) і його нелінійного представлення Лакса (5) та їх псевдогруп точкових симетрій G і G_L , з точністю до G - і G_L -еквівалентностей, вичерпно прокласифіковано одно- та двовимірні підалгебри псевдоалгебр $\mathfrak{g}$ та $\mathfrak{g}_L$, відповідно [31, Section 5]. Це дозволило повністю прокласифікувати ліївські редукції бездисперсійного рівняння Нижника до диференціальних рівнянь з частинними похідними з двома незалежними змінними та до звичайних диференціальних рівнянь [31, Sections 7–8]. Також показано, що ліївські редукції цього рівняння до алгебраїчних рівнянь не дають нових розв'язків у порівнянні з тими, що побудовані з використанням ліївських редукцій корозмірностей один і два.

Вичерпно досліджено ліївські симетрії отриманих редуктованих рівнянь, а також проаналізовано, які з них пов'язані з прихованими симетріями вихідного рівняння (1). Вперше обчислено групи точкових симетрій редуктованих рівнянь, зокрема тих, що не мають максимального рангу, включно з їх дискретними точковими симетріями. Виявилося, що на відміну від ліївських симетрій прості та очевидні дискретні точкові симетрії вихідного рівняння (1) навіть за оптимального вибору анзаців у стилі [27] можуть індукувати складні та нетривіальні дискретні точкові симетрії відповідних редуктованих рівнянь.

Побудовано цікаві широкі сім'ї нових точних інваріантних розв'язків бездисперсійного рівняння Нижника (1) у різних замкнених формах, зокрема

- в термінах елементарних функцій:

$$u = c_1(|x|^{3/2} + |y|^{3/2})^{4/3} + c_2(|y|^{3/2} - |x|^{3/2})^{4/3} \quad \text{для } xy \geq 0,$$

$$u = (x^3 - y^3)^{2/3} \left(c_1 \cos \left(\frac{4}{3} \arctg \left| \frac{y}{x} \right|^{3/2} \right) + c_2 \sin \left(\frac{4}{3} \arctg \left| \frac{y}{x} \right|^{3/2} \right) \right) \quad \text{для } xy \leq 0,$$

де c_1 і c_2 — довільні сталі і одна з них, якщо вона не дорівнює нулю, може бути рівною 1 відповідно до G -еквівалентності;

- в термінах функцій Ламберта:

$$u = -(y - \mu x)^3 \frac{18z^2 + 15z + 4}{216(\mu^3 - 1)z^3}, \quad z \in \{W_0(\tilde{\omega}), W_{-1}(\tilde{\omega})\}, \quad \tilde{\omega} := -\frac{e^{-t}(y - \mu x)}{2(\mu^3 - 1)},$$

де W_0 і W_{-1} — головна і побічна дійсні гілки W -функції Ламберта;

- в термінах гіпергеометричних функцій:

$$u = \sqrt{\left| \frac{y^3}{x} \right|} {}_3F_2\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}; \frac{7}{6}, \frac{3}{2}; \frac{y^3}{x^3}\right),$$

де ${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z)$ — узагальнена гіпергеометрична функція;

- в параметричній формі:

$$u = e^{-(x+y)/2} \frac{(3z^2 + 3z + 1)^{-1/6}}{|z|^{1/2}|z + 1|^{1/2}} \quad \text{разом з} \quad \ln \left| \frac{z + 1}{z} \right| - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg(\sqrt{3}(2z + 1)) = y - x;$$

- в неявній формі: $u = e^{-x}\varphi(y)$, де функція $\varphi = \varphi(y)$ неявно визначається як

$$\int \frac{d\varphi}{(\varphi^3 + c_1\varphi + c_2)^{1/3}} = \omega + c_3.$$

Більше знайдених розв'язків рівняння (1) див. у [31, Sections 6–8].

Для ілюстрації можливостей знаходження нелінійських розв'язків бездисперсійного рівняння Нижника (1) використано мультиплікативне розділення змінних. З точністю до G -еквівалентності такі сім'ї вичерпують отримані цим методом розв'язки:

$$\begin{aligned} u &= \varphi(x)\psi(y), \quad \int \frac{d\varphi}{(\varphi^3 + c_1\varphi + c_2)^{1/3}} = x, \quad \int \frac{d\psi}{(\psi^3 + c_3\psi + c_4)^{1/3}} = -y; \\ u &= (|x|^{3/2} + \zeta(t))(|y|^{3/2} + \theta(t)), \quad u = (x + \zeta(t))|y|^{3/2}, \end{aligned}$$

де c_i , $i = 1, \dots, 4$, — довільні сталі, ζ і θ — довільні досить гладкі функції від t . Кожна з цих сімей суттєво узагальнює деяку сім'ю інваріантних розв'язків рівняння (1).

Завдяки правильному впорядкуванню ієрархії лінійських редукцій рівняння (1) і точному вибору для інтегрування невеликої кількості редукованих звичайних диференціальних рівнянь глибоко проаналізовано і побудовано ширші сім'ї точних розв'язків рівняння (1), ніж ті, що були представлені в літературі. Для знаходження точних розв'язків редукованих звичайних диференціальних рівнянь також використано відповідні редуковані системи для нелінійного представлення Лакса (5).

Варто зауважити, що перевірка побудованих розв'язків і їх нееквівалентності відомим розв'язкам є останнім, але найважливішим етапом будь-якої процедури знаходження точних розв'язків диференціальних рівнянь. На жаль, цей крок зазвичай ігнорують, що призводить до появи багатьох статей, які містять лише неправильні або відомі розв'язки, див. огляд цих та аналогічних проблем в [15, 26]. У [31] перевірено всі отримані розв'язки та вибрано лише G -нееквівалентні серед них.

5 Висновки

Застосовуючи оригінальну версію алгебраїчного методу на основі мегаідеалів, обчислено псевдогрупи точкових симетрій бездисперсійного рівняння Нижника (1), відповідного нелінійного представлення Лакса (5) та бездисперсійної системи Нижника (6). Також побудовано псевдогрупу контактних симетрій бездисперсійного рівняння Нижника (1), що є першим використанням оригінальної версії алгебраїчного методу на основі мегаідеалів для такої побудови.

Показано, що для бездисперсійного рівняння Нижника (1) необхідна алгебраїчна умова стабілізації його максимальної псевдоалгебри лінійської інваріантності $\mathfrak{g}$ при піднятті за

допомогою будь-якого елемента його псевдогрупи точкових симетрій G повністю визначає псевдогрупу G . Це дало перший приклад системи диференціальних рівнянь із такою властивістю в літературі.

Побудовано усі диференціальні рівняння третього порядку з трьома незалежними змінними, які є інваріантними відносно псевдоалгебри $\mathfrak{g}$. Знайдено набір геометричних властивостей бездисперсійного рівняння Нижника (1), який вичерпно його визначає. Крім інваріантності відносно псевдоалгебри $\mathfrak{g}$, він включає наявність трьох найпростіших характеристик 1, u_{xx} і u_{yy} законів збереження. Це поєднує обернену задачу групової класифікації з оберненою задачею щодо законів збереження.

Завдяки вичерпній класифікації одно- та двовимірних підалгебр максимальної псевдоалгебри лівської інваріантності $\mathfrak{g}$ бездисперсійного рівняння Нижника (1), проведено повну класифікацію лівських редукцій цього рівняння і, відповідно, побудовано широкі сім'ї його нових точних інваріантних розв'язків в замкненій формі в термінах елементарних функцій, функцій Ламберта та гіпергеометричних функцій, а також у параметричній або неявній формі. Також для ілюстративної побудови неінваріантних розв'язків використано мультиплікативне розділення змінних.

Класичний симетрійний аналіз бездисперсійного рівняння Нижника (1), проведений у [4, 30, 31], створює необхідні передумови для розгляду інших симетріє-подібних об'єктів, пов'язаних з цим рівнянням, включно з нелокальними, зокрема узагальнених симетрій, законів збереження та модулів редукції. Такий аналіз є першим кроком нашої програми досліджень рівнянь і систем Нижника в рамках розширеного симетрійного аналізу, аналогічного до досліджень (1+1)-вимірного лінійного рівняння теплопровідності в [9, 14, 25, 28], (1+1)-вимірного лінійного рівняння Клейна–Гордона в [21], виродженого (1+2)-вимірного рівняння Бюргерса в [28], системи Бойті–Леона–Пемпінеллі в [16] чи однієї ізотермічної моделі дрейфового потоку без ковзання в [19, 20].

Подяки

Авторка висловлює вдячність доктору фізико-математичних наук, професору Роману Омеляновичу Поповичу та доктору фізико-математичних наук Вячеславу Миколайовичу Бойку за визначення напрямку дослідження та постановку задач, а також анонімному рецензенту за цінні зауваження для покращення статті.

Фінансування

Дослідження підтримано грантовою допомогою від Simons Foundation (1290607, О.О.В.).

Список використаних джерел

- [1] Bihlo A., Dos Santos Cardoso-Bihlo E.M., Popovych R.O., [Algebraic method for finding equivalence groups](#), *J. Phys. Conf. Ser.* **621** (2015), 012001, [arXiv:1503.06487](#).
- [2] Bihlo A., Popovych R.O., [Point symmetry group of the barotropic vorticity equation](#), in *Proceedings of 5th Workshop “Group Analysis of Differential Equations & Integrable Systems” (June 6–10, 2010, Protaras, Cyprus)*, University of Cyprus, Nicosia, 2011, pp. 15–27, [arXiv:1009.1523](#).
- [3] Boiti M., Leon J.J.-P., Manna M., Pempinelli F., [On the spectral transform of a Korteweg–de Vries equation in two spatial dimensions](#), *Inverse Problems* **2** (1986), 271–279.
- [4] Boyko V.M., Popovych R.O., Vinnichenko O.O., [Point- and contact-symmetry pseudogroups of dispersionless Nizhnik equation](#), *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **132** (2024), 107915, 19 pp., [arXiv:2211.09759](#).
- [5] Dos Santos Cardoso-Bihlo E., Popovych R.O., [Complete point symmetry group of the barotropic vorticity equation on a rotating sphere](#), *J. Engrg. Math.* **82** (2013), 31–38, [arXiv:1206.6919](#).

- [6] Dos Santos Cardoso-Bihlo E., Popovych R.O., [On the ineffectiveness of constant rotation in the primitive equations and their symmetry analysis](#), *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **101** (2021), 105885, [arXiv:1503.04168](#).
- [7] Fushchych W., Popowych R., [Symmetry reduction and exact solutions of the Navier–Stokes equations. I](#), *J. Nonlinear Math. Phys.* **1** (1994), 75–113, [arXiv:math-ph/0207016](#).
- [8] Fushchych W., Popowych R., [Symmetry reduction and exact solutions of the Navier–Stokes equations. II](#), *J. Nonlinear Math. Phys.* **1** (1994), 158–188, [arXiv:math-ph/0207016](#).
- [9] Fushchych W.I., Shtelen W.M., Serov M.I., Popovych R.O., [Q-conditional symmetry of the linear heat equation](#), *Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr.* (1992), no. 12, 28–33.
- [10] Hydon P.E., [How to construct the discrete symmetries of partial differential equations](#), *Eur. J. Appl. Math.* **11** (2000), 515–527.
- [11] Konopelchenko B. and Martínez Alonso L., [Nonlinear dynamics on the plane and integrable hierarchies of infinitesimal deformations](#), *Stud. Appl. Math.* **109** (2002), 313–336.
- [12] Kontogiorgis S., Popovych R.O., Sophocleous C., [Enhanced symmetry analysis of two-dimensional Burgers system](#), *Acta Appl. Math.* **163** (2019), 91–128, [arXiv:1709.02708](#).
- [13] Koval S.D., Bihlo A., Popovych R.O., [Extended symmetry analysis of remarkable \(1+2\)-dimensional Fokker–Planck equation](#), *European J. Appl. Math.* **34** (2023), 1067–1098, [arXiv:2205.13526](#).
- [14] Koval S.D. and Popovych R.O., [Point and generalized symmetries of the heat equation revisited](#), *J. Math. Anal. Appl.* **527** (2023), 127430, [arXiv:2208.11073](#).
- [15] Kudryashov N.A., [Seven common errors in finding exact solutions of nonlinear differential equations](#), *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **14** (2009), 3507–3529, [arXiv:1011.4268](#).
- [16] Maltseva D.S., Popovych R.O., [Complete point-symmetry group, Lie reductions and exact solutions of Boiti–Leon–Pempinelli system](#), *Phys. D* **460** (2024), 134081, [arXiv:2103.08734](#).
- [17] Morozov O.I., Chang J.-H., [The dispersionless Veselov–Novikov equation: symmetries, exact solutions, and conservation laws](#), *Anal. Math. Phys.* **11** (2021), 126.
- [18] Nizhnik L.P., Integration of multidimensional nonlinear equations by the inverse problem method, *Soviet Phys. Dokl.* **25** (1980), 706–708.
- [19] Opanasenko S., Bihlo A., Popovych R.O., Sergyeyev A., [Extended symmetry analysis of isothermal no-slip drift flux model](#), *Phys. D* **402** (2020), 132188, [arXiv:1705.09277](#).
- [20] Opanasenko S., Bihlo A., Popovych R.O., Sergyeyev A., [Generalized symmetries, conservation laws and Hamiltonian structures of an isothermal no-slip drift flux model](#), *Phys. D* **411** (2020), 132546, [arXiv:1908.00034](#).
- [21] Opanasenko S., Popovych R.O., [Generalized symmetries and conservation laws of \(1+1\)-dimensional Klein–Gordon equation](#), *J. Math. Phys.* **61** (2020), 101515, [arXiv:1810.12434](#).
- [22] Pavlov M.V., Modified dispersionless Veselov–Novikov equation and corresponding hydrodynamic chains, 2006, [arXiv:nlin/0611022](#).
- [23] Pocheketa O.A., Popovych R.O., [Extended symmetry analysis of generalized Burgers equations](#), *J. Math. Phys.* **58** (2017), 101501, [arXiv:1603.09377](#).
- [24] Popovych R.O., Boyko V.M., Nesterenko M.O., Lutfullin M.W., [Realizations of real low-dimensional Lie algebras](#), *J. Phys. A* **36** (2003), 7337–7360, [arXiv:math-ph/0301029](#).
- [25] Popovych R.O., Kunzinger M., Ivanova N.M., [Conservation laws and potential symmetries of linear parabolic equations](#), *Acta Appl. Math.* **2** (2008), 113–185, [arXiv:0706.0443](#).
- [26] Popovych R.O., Vaneeva O.O., [More common errors in finding exact solutions of nonlinear differential equations. I](#), *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **15** (2010), 3887–3899, [arXiv:0911.1848](#).
- [27] Popowych R., [On Lie reduction of the Navier–Stokes equations](#), *J. Nonlinear Math. Phys.* **2** (1995), 301–311.
- [28] Vaneeva O.O., Popovych R.O., Sophocleous C., [Extended symmetry analysis of two-dimensional degenerate Burgers equation](#), *J. Geom. Phys.* **169** (2021), 104336, [arXiv:1908.01877](#).
- [29] Veselov A.P., Novikov S.P., Finite-zone two-dimensional potential Schrödinger operators. Explicit formulas and evolution equations, *Soviet Math. Dokl.* **30** (1984), 588–591.
- [30] Vinnichenko O.O., [Geometric and algebraic properties of dispersionless Nizhnik equation](#): PhD Thesis, Kyiv, 2024, 171 pp.
- [31] Vinnichenko O.O., Boyko V.M., Popovych R.O., [Lie reductions and exact solutions of dispersionless Nizhnik equation](#), *Anal. Math. Phys.* **14** (2024), 82, 56 pp., [arXiv:2308.03744](#).

Point symmetries and exact solutions of dispersionless Nizhnik equation

Oleksandra O. VINNICHENKO

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

E-mail: oleksandra.vinnichenko@imath.kiev.ua

ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-8089-8162>

Received April 2, 2025, in the final form June 20, 2025

<https://doi.org/10.3842/confKAU.2025.math.03>

Abstract. We discuss relations between various Nizhnik models as well as the history of their development. The main focus is on a review of previously obtained results on the classical symmetry analysis of the dispersionless Nizhnik equation. This equation is special in many aspects due to its remarkable algebraic and geometric properties. We describe the construction of point- and contact-symmetry pseudogroups of this equation as well as point-symmetry pseudogroups of its nonlinear Lax representation and of the dispersionless Nizhnik system, which involves an original megaideal-based version of the algebraic method. We find interesting algebraic and geometric properties of the dispersionless Nizhnik equation. The complete classification of Lie reductions of this equation leads to finding its exact invariant solutions in closed form (explicit, implicit, or parametric one). The most interesting among these solutions are presented in the paper.

Keywords: dispersionless Nizhnik equation; point-symmetry pseudogroup; contact-symmetry pseudogroup; Lie invariance algebra; megaideal; Lie reduction; invariant solutions; hidden symmetries