

Інтерактивна параметризація тором одновимірною квазікристала Фібоначі

Михайло О. КОРЕШКОВ ¹

E-mail: mykhailo.koreshkov@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-1968-0580>

Марина О. НЕСТЕРЕНКО ^{1,2}

E-mail: maryna.nesterenko@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6352-2365>

1) Інститут математики НАН України, Київ, Україна

2) Університет “Київська школа економіки”, Київ, Україна

Отримано 9 квітня 2026, у фінальній формі 26 червня 2026

<https://doi.org/10.3842/kau.2026.math.01>

Анотація. У роботі оглядово наведено основні математичні концепції теорії квазікристалів та розглянуто їх на прикладі обчислювальних експериментів із одновимірним квазікристалом Фібоначі. Особливу увагу приділено сучасному математичному апарату для опису квазікристалів: дифракційна міра, схема cut-and-project, множини Делоне, локальна нерозрізнованість, топологія на множинах Делоне, локальна оболонка квазікристала та її параметризація тором. Наведено короткий огляд наявного програмного забезпечення та обчислювальних підходів, що застосовуються для побудови, візуалізації й дослідження квазікристалів. Основним результатом роботи є розробка інтерактивного програмного забезпечення у форматі Python Jupyter Notebook для побудови квазікристала Фібоначі, параметризованого координатами на фундаментальній комірці. Цей інструмент є основою наступних обчислювальних досліджень авторів і може використовуватися для навчальних цілей та ілюстрації геометрії локальної оболонки.

Ключові слова: математичні квазікристали; cut-and-project; локальна оболонка; параметризація тором; Python.

1 Вступ

Теорія математичних та фізичних квазікристалів є відносно новою, не усталеною галуззю, яка активно розвивається. З точки зору математики, квазікристали є точковими множинами без трансляційної симетрії, але із певною самоподібністю, особливо у великому масштабі, що проявляється у їх геометричних та спектральних властивостях. Математичні квазікристали також пов'язані із динамічними системами та замоцненнями простору із скінченним набором локальних конфігурацій [1, 5].

У даній роботі викладено огляд теорії математичних квазікристалів, розглянуто поняття параметризації тором, а також розроблено інтерактивне ПЗ для Python, яке застосовано для аналізу та дослідження одновимірних квазікристалів. Як приклад використано квазікристал Фібоначі.

Важливою властивістю кристалічних матеріалів є їхня здатність розсіювати випромінювання з утворенням дискретних дифракційних картин, що відображають внутрішню структуру зразка. Традиційно припускалося, що такі дифракційні властивості притаманні виключно періодичним структурам, зокрема регулярним ґраткам та ґраткам Браве. Особливістю кристалічних ґраток є жорстке обмеження на допустимі симетрії повороту, яке визначається теоремою про кристалографічне обмеження (crystallographic restriction theorem).

Відкриття фізичних квазікристалів — матеріалів із “забороненою” симетрією та дискретними дифракційними картинками, за яке Даніелю Шехтману 2011 року було присуджено

Нобелівську премію з хімії, — стало великим поштовхом у розвитку нової галузі та обумовлює необхідність побудови математичних моделей квазікристалічних структур. Першими дослідженнями у цій галузі були роботи, присвячені майже періодичним функціям — тригонометричним поліномам із ірраціональними відношеннями періодів. Таку функцію можна розглядати як обмеження функції аргументу вищої розмірності на підпростір меншої розмірності, що відповідає проєкції під ірраціональним кутом [6].

Визначення математичного квазікристала залежить від контексту, але загалом розглядаються та досліджуються множини точок, які мають дискретну дифракційну картину. Такі точкові множини моделюють положення атомів у фізичних квазікристалах.

Сучасним підходом до побудови квазікристалів є метод перерізів та проєкцій (cut-and-project method), у якому математичний квазікристал отримується як проєкція регулярної ґратки вищої розмірності на підпростір меншої розмірності. Початкові ідеї такого підходу були сформульовані Мейером у гармонійному аналізі [13], а пізніше Муді та Патера [15] адаптували та розвинули метод для квазікристалів.

Для побудови квазікристалу можна вибрати регулярну ґратку $\tilde{L} = \mathbb{Z}^{d+p} \subset \mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^p$, визначити фізичний підпростір $E_{\text{phys}} \cong \mathbb{R}^d$, розташований під іраціональним кутом до ґратки, та внутрішній підпростір $E_{\text{int}} \cong \mathbb{R}^p$, ортогональний до фізичного. Далі вибираємо вікно $W \subset E_{\text{int}}$ та виконуємо проєкцію елементів $\tilde{x} \in \tilde{L}$ на фізичний $x = \pi_{\text{phys}}(\tilde{x})$ та внутрішній $x' = \pi_{\text{int}}(\tilde{x})$ простори. У більш загальному випадку конструкції перерізів та проєкцій, замість регулярної ґратки $\tilde{L}$ можна використовувати кореневу ґратку. Діаграма типової конструкції, де стрілками з гачком позначено вкладення підмножин:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \mathbb{R}^d & \xleftarrow{\pi_{\text{phys}}} & \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p & \xrightarrow{\pi_{\text{int}}} & \mathbb{R}^p & \xleftarrow{\quad} & W \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 \Lambda(W) & \hookrightarrow & L & \xleftarrow{1-1} & \tilde{L} & \xrightarrow{\text{щільний образ}} & L' & &
 \end{array}$$

Модельна множина (квазікристал) Λ визначається як

$$\Lambda = \Lambda(W) = \{x \in L \mid x' \in W\} = \pi_{\text{phys}}(\tilde{L} \cap \pi_{\text{int}}^{-1}(W)).$$

Розглядатимемо лише *незвідні* модельні множини [2], тобто такі, що $\pi_{\text{int}}(\tilde{L})$ щільна у E_{int} , $\pi_{\text{phys}}|_{\tilde{L}}$ ін'єктивна, а вікно W є обмеженою борелівською множиною з непорожньою внутрішністю та межею міри нуль. У роботі досліджуються вікна лише у вигляді деяких кубоїдів $W = \prod_{i=1}^d [a_i, b_i]$, проте у загальному випадку вони можуть мати складну, фрактальну структуру [1, рис. 5.2].

Незвідні модельні множини є рівномірно дискретними та мають дискретну дифракційну картину [2], розглянемо ці поняття детальніше.

Нехай $X \subset \mathbb{R}^d$ — рівномірно дискретна точкова множина, δ_x — дельта-функція (розподіл), а $\omega_X = \sum_{x \in X} \delta_x$ — “гребінець Дірака”, міра асоційована із множиною X . Рівномірна дискретність ($\inf_{x \neq y \in X} |x - y| > 0$) гарантує, що ω_X є локально скінченною мірою.

Нехай $B_r(x) = \{y \mid \|y - x\| < r\}$. Визначимо *автокореляційну міру* X як

$$\gamma_X = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{vol}(B_r(0))} \sum_{x, y \in X \cap B_r(0)} \delta_{x-y}.$$

Дифракційною мірою множини X називають міру $\hat{\gamma}_X$, яка є перетворенням Фур'є автокореляції і визначається дією на функціях Шварца $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ як $\hat{\gamma}_X(f) = \gamma_X(f)$. Якщо X — ґратка чи модельна множина, то обидві міри існують, а автокореляція має вигляд $\gamma_X = \sum_{z \in \Delta_X} \nu(z) \delta_z$, де $\nu(z)$ — деякі дійсні коефіцієнти, а $\Delta_X = \{x - y \mid x, y \in X\}$ [1].

Розглянемо *регулярну ґратку* $\Gamma = \mathbb{Z}b_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}b_d$ із лінійно незалежними базисними векторами $b_1, b_2, \dots, b_d$. Нехай $\Gamma^* = \{y \in \mathbb{R}^d \mid \langle y, x \rangle \in \mathbb{Z}, \forall x \in \Gamma\}$ — дуальна ґратка, $d = \text{dens}(\Gamma) = \frac{1}{\det(b_1, b_2, \dots, b_d)}$. Тоді $\Delta_\Gamma = \Gamma$, автокореляційна міра γ_Γ існує, а дифракційна міра є дискретною та має вигляд $\hat{\gamma}_\Gamma = d^2(\sum_{y \in \Gamma^*} \delta_y)$.

Схожими за характеристиками точковими множинами є *множини Делоне* — рівномірно дискретні множини, які також є *відносно щільними*, тобто існують числа $0 < R, r < \infty$ такі, що $\forall x \in \mathbb{R}^d, \exists y \in X: |x - y| < R$ та $\forall x, y \in X, x \neq y: |x - y| > r$. Іншими словами, множини Делоне — дискретні множини, у яких для кожної точки відстань до найближчої точки обмежена згори та знизу. При $r = R = \varepsilon$ множина Делоне є також ε -сіткою.

Математичними квазікрystalами називатимемо множини Делоне, які мають дискретну дифракційну картину, тобто їх дифракційна міра є сингулярною, що відображено в наступних умовах:

$$\exists \text{dens}(X) < \infty, \quad \text{dens}(X) := \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\#(X \cap B_R)}{\text{vol}(B_R)},$$

$$\exists \hat{\gamma}_X, \quad \hat{\gamma}_X \text{ — суто точкова міра.}$$

Важливо, що для квазікрystalів дифракційна картина є дискретною, але *щільною*, і має самоподібну структуру, якщо розглядати множини її точок з обмеженням інтенсивності знизу. Існують і інші способи побудови квазікрystalів з точки зору динамічних систем, наприклад, за допомогою правил підстановки, розбиття чи скінченних автоматів [22].

Багатовимірні квазікрystalи та відповідні замощення можна отримати аналогічно до квазікрystalів Фібоначі, проєктуючи гіперкуби регулярної ґратки, що потрапили у вікно, на фізичний підпростір. Існує багато алгоритмів побудови точкових множин та замощень на двовимірному фізичному просторі. Популярністю користуються алгоритми, що використовують сліди перетину площин ґратки із площиною фізичного підпростору для пошуку допустимих точок, наприклад *generalized dual method* [21], метод de Bruijn [7,8], *multigrid* [9].

З іншого боку, існує задача відновлення квазікрystalу за його дифракційною картиною з експериментальних даних. Відомим інструментом є *Superflip* [17], який відновлює кристал у довільній розмірності за допомогою ітеративного алгоритму обернення знаків заряду (*charge flipping*). Іншим підходом є використання алгоритмів машинного навчання та комп'ютерного зору для опрацювання зображень поверхневої мікроскопії, наприклад [10] та [12]. За наявності шумних координат точок модельної множини або багатовимірної ґратки може стояти задача визначення її симетрій, методи для якої сформульовано у класичній статті [11], та сучасній [24]. А новіші статті [16, 18, 23] визначають умови, за яких збурену випадковим чином структуру можна відновити майже напевно.

Важливо зауважити, що модельні множини та замощення можна будувати не лише на регулярних ґратках, а й на кореневих ґратках — ґратках породжених кореневими системами, що дозволяє отримати простіший вигляд та меншу розмірність оточуючого простору для деяких квазікрystalів. Водночас, оператори симетрій ускладнюються, і виникає потреба у використанні теорії груп Коксетера та Вейля для їх опису. Наприклад, з кореневої ґратки A_4 можна отримати замощення Тюбінгена проєктуючи її комірки Делоне, а замощення Пенроуза — з комірок Вороного [4].

Окремим напрямком є дослідження *локальних функцій*, які узгоджені з симетрією квазікрystalа (“поважають симетрію”), а також їх обчислення та побудова апроксимацій із широкою областю визначення. Прикладом таких функцій є тип комірки замощення, відстань до найближчої точки квазікрystalа, атомний потенціал квазікрystalа тощо. Перспективним методом для їх наближення є використання Фур’є аналізу на торі, яким параметризується локальна оболонка квазікрystalа [14].

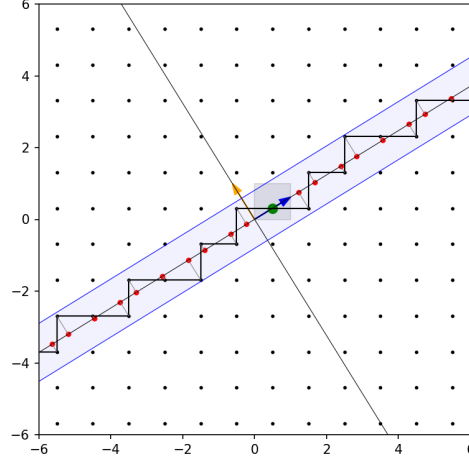


Рис. 1. Квазікристал Фібоначі як проєкція регулярної ґратки $\mathbb{Z}^2$ на пряму $y = \frac{2}{1+\sqrt{5}}x$.

2 Квазікристал Фібоначі

Класичним та чи не найбільш дослідженим прикладом квазікристала є родина одновимірних *квазікристалів Фібоначі*. Конкретний вигляд модельної множини залежить від вибору регулярної ґратки, фізичного та внутрішнього підпросторів, а також вікна.

Один із методів побудови полягає у тому, щоб визначити двовимірну квадратну ґратку $\tilde{L} = \mathbb{Z}^2$ та спрямувати внутрішній простір під ірраціональним кутом до неї, наприклад $\arctan \tau^{-1}$, де $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$ — константа золотого перерізу. Визначимо $e_{\text{phys}} = (1, \tau^{-1})$ та $e_{\text{int}} = (-\tau^{-1}, 1)$ — ортогональні вектори вздовж фізичного та внутрішнього підпросторів відповідно. Замість τ можна взяти інший корінь рівняння $x^2 = mx + 1$, $m \in \mathbb{N}$.

Вікно W виберемо як проєкцію комірки Вороного навколо нульової точки ґратки $\mathbb{Z}^2$ на внутрішній підпростір, тобто $W = \pi_{\text{int}}(\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_{\infty} < 1/2\})$. Зауважимо, що таке вікно симетричне відносно нуля.

У результаті отримуємо неперіодичну дискретну множину Λ (див. рис. 1). Сусідні точки у Λ можуть знаходитись лише на двох різних відстанях одна від одної, що визначає “тип плитки”. Таким чином, розглядатимемо лише квазікристали, які є замоцненнями $\mathbb{R}$ двома типами плиток: “довга” та “коротка”, що відповідають кроку вгору та праворуч на ґратці (не враховуючи сингулярні випадки).

3 Локальна оболонка

Множина $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ також називається множиною Делоне, якщо існують $r, R > 0$ такі, що

$$\min\{\|x - y\| \mid x, y \in \Lambda, y \neq x\} \geq r \quad \text{та} \quad \max_x \min\{\|x - y\| \mid y \in \Lambda, y \neq x\} \leq R.$$

Нехай $\mathbb{R}^d \ni t$ діє на Λ як трансляція (зсув), тобто $t + \Lambda = \{t + x \mid x \in \Lambda\}$.

Назвемо множини Делоне A, B *локально нерозрізнюваними* (locally indistinguishable, LI), якщо будь-який окіл $A \cap B_r(x)$ точки $x \in A$ можна знайти у B після деякого зсуву, і навпаки [1]: $\forall x \in A, \forall r > 0 \exists t, t' \in \mathbb{R}^d: t + (A \cap B_r(x)) = B \cap B_r(t' + x)$. Локальна нерозрізнюваність є відношенням еквівалентності. Крім цього, на множинах Делоне прийнято розглядати топологію, в якій множини близькі, якщо вони співпадають на великому радіусі з невеликою похибкою. Вона визначатиметься базою відкритих множин вигляду

$$U_{R,\varepsilon}(A) = \left\{ B \mid \begin{array}{l} B \cap B_R(0) \subset A + B_{\varepsilon}(0), \\ A \cap B_R(0) \subset B + B_{\varepsilon}(0) \end{array} \right\}.$$

Локальною оболонкою множини Делоне Λ називається топологічний простір $X(\Lambda)$, утворений замиканням множини трансльованих копій Λ відносно топології на множинах Делоне,

$$X(\Lambda) = \overline{\{t + \Lambda \mid t \in \mathbb{R}^d\}}.$$

Твердження 1 ([19, Lemma 1]). Локальна оболонка замощення площини із скінченним набором локальних конфігурацій (наприклад, замощення Пенроуза) складатиметься з усіх замощень, породжених цим набором локальних конфігурацій.

Твердження 2 ([19, Lemma 2]). Топологічний простір $X(\Lambda)$ є компактним, при чому дія трансльацій $\mathbb{R}^d$ на Λ підіймається до неперервної групи трансльацій на $X(\Lambda)$.

З твердження 1, локальна оболонка складається з усіх локально нерозрізняваних із Λ множин Делоне. Тому локальна оболонка також називається класом локальної нерозрізняваності (LI-класом). Для регулярної ґратки $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ локальна оболонка $X(\Gamma)$ є тором $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$. Усі локально подібні до Γ множини — це трансльації Γ , і вони параметризуються точками фундаментальної комірки із ототожненням її відповідних меж.

Параметризація реалізацій квазікрystalа Фібоначі із заданим вікном та кутом підпростору відбувається схожим чином, за допомогою тору $\mathbb{T}^2$ на фундаментальній комірці. Повторимо схему cut-and-project, але із рівними розмірностями фізичного та внутрішнього підпросторів $d = p$.

$$\Lambda = \Lambda(W) = \{x \in L \mid x' \in W\} = \pi_{\text{phys}}(\tilde{L} \cap \pi_{\text{int}}^{-1}(W)),$$

де $\tilde{L} \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ — регулярна ґратка, $L \subset E_{\text{phys}} \cong \mathbb{R}^d$, а $L' \subset E_{\text{int}} \cong \mathbb{R}^d$.

Позначимо $\Lambda_{(a,b)} = a + \Lambda(-b + W) = \{x + a \mid x \in L, x' + b \in W\}$. Відображення $(a, b) \mapsto \Lambda_{(a,b)}$ може бути не ін'єктивним, наприклад через сингулярні випадки, коли точка ґратки потрапляє на межу вікна, тому вводимо класи еквівалентності $(a, b)_L = \{(a', b') \mid \Lambda_{(a',b')} = \Lambda_{(a,b)}\}$.

Увесь подальший аналіз функцій пов'язаних з квазікрystalами та побудова неперіодичних дискретних множин з великою кількістю точок спираються на твердження 3 та 4 доведені у роботах [14] та [3, 20] відповідно.

Твердження 3. Трансльації модельної множини у фізичному просторі $\{\Lambda_{(t,0)} \mid t \in \mathbb{R}^d\}$ утворюють щільну підмножину $X(\Lambda)$.

Інтуїтивно це означає що $\Lambda_{(t,0)}$ є кривою на торі під ірраціональним кутом, яка щільно заповнює його.

Твердження 4. Існує параметризація локальної оболонки тором, тобто існує неперервне відображення $\beta: X(\Lambda) \longrightarrow \mathbb{T}^{2d}$ таке, що

- (1) β сюр'єктивне;
- (2) β ін'єктивне майже всюди (за мірою Хаара на торі);
- (3) $\forall t \in \mathbb{R}^d \forall \Lambda' \in X(\Lambda)$ виконується $\beta(t + \Lambda') = \beta(\Lambda') + (t, 0)$;
- (4) $\forall t \in \mathbb{R}^d$ виконується $\beta(t + \Lambda) = (t, 0)_L$.

4 Інтерактивне програмне забезпечення

Для ілюстрації параметризації локальної оболонки тором на прикладі квазікрystalа Фібоначі було розроблено інтерактивне ПЗ для Python у форматі Jupyter Notebook, код якого розміщено у вільному доступі на GitHub.¹

¹<https://github.com/mkrooted256/fibonacci-torus-notebook/>.

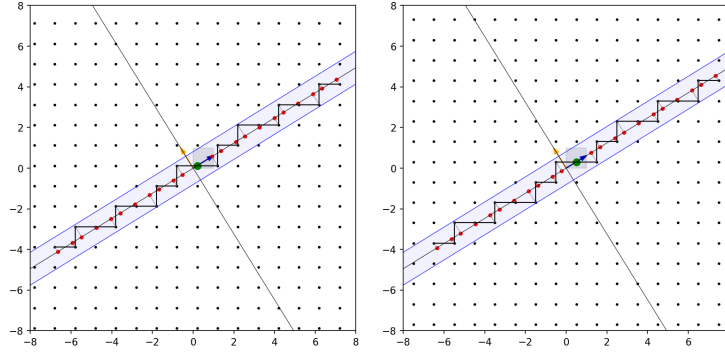


Рис. 2. Ліворуч: $u = 0,2$, $v = 0$; праворуч: $u = 0,5$, $v = 0$. Конфігурація та сама, трансляція у фізичному просторі.

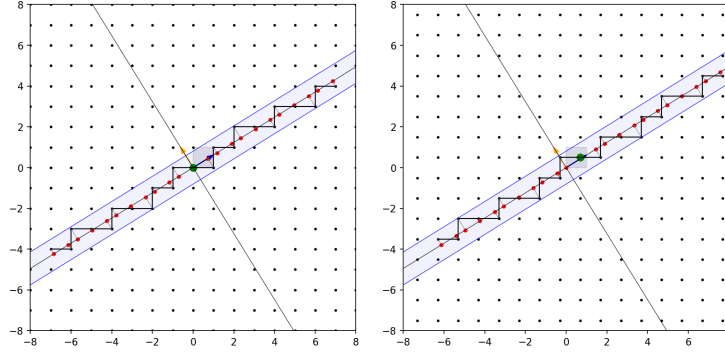


Рис. 3. Ліворуч: $u = 0$, $v = 0$; праворуч: $u = 0$, $v = 0,5$. Конфігурація змінюється, трансляція у внутрішньому просторі, видно накручування: траєкторія почалася у лівому нижньому куті і продовжилась у правому нижньому.

Напівпрозора смуга на кожній ілюстрації відповідає смузі навколо фізичного простору, яка проєктується у вікно W на внутрішньому просторі. Темний квадрат відповідає фундаментальній комірці регулярної ґратки, яка параметризує локальну оболонку тором.

Параметризація $(x, y) \mapsto \Lambda_{(x,y)}$ відбувається шляхом трансляції ґратки на вектор (x, y) , при цьому вікно та простори залишаються нерухомими.

У ПЗ реалізована параметризація xu та uv координатами, де xu вказуються у двовимірному просторі і обмежені фундаментальною областю $[0; 1]^2$, а uv вказуються у термінах базисних векторів фізичного та внутрішнього простору.

Рух лише за u координатою відповідає реалізаціям $\Lambda_{(t,0)}$, що просто транслює модельну множину у фізичному просторі (рис. 2). Рух за v координатою змінює “реалізацію” квазікристала, що наочно видно за допомогою ab-коду послідовності типів плиток, які виводяться текстом — вони будуть різні в околі нуля (рис. 3). Збільшення координати u чи v окремо від іншої призводить до “накручування” точки початку квазікристала на торі.

Окрім коду, документації, прикладів та інструкцій, Jupyter Notebook також містить інтерактивний інтерфейс для введення uv або xu координат у фундаментальній області (рис. 4).

5 Висновки

У роботі наведено основні означення з теорії математичних квазікристалів, зокрема для квазікристала Фібоначі та його локальної оболонки. Для якісного аналізу та інтерпретації параметризації локальної оболонки тором було розроблено інтерактивне ПЗ для Python,

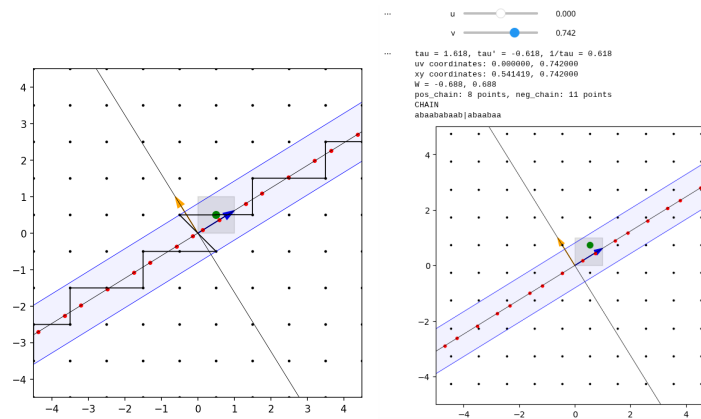


Рис. 4. Ліворуч: сингулярний випадок $x = 0,5$, $y = 0,5$; праворуч: інтерфейс інтерактивного режиму для введення uv координат.

яке дозволяє візуалізувати різні реалізації квазікристала Фібоначі та відображає їх відповідність точкам на торі.

У подальшому будуть продовжені дослідження розпочаті у роботі [14] щодо апроксимації локальних функцій, а саме, буде детальніше розглянута топологія локальної оболонки та L^2 -простір функцій на торі, яким параметризується локальна оболонка. Крім цього, буде розвинено Фур'є аналіз на торі та застосовано його до наближення локальних функцій.

Подяки

Автори дякують анонімним рецензентам за цінні зауваження та коментарі, що допомогли покращити статтю.



Проект 2025.07/0405 “Алебраїчні методи дослідження рівнянь математичної фізики” реалізується завдяки грантовій підтримці Національного фонду досліджень України. Зміст, висвітлений в цій роботі, може не співпадати з поглядами Національного фонду досліджень України і є виключною відповідальністю Інституту математики НАН України.

Література

- [1] Baake M., [A guide to mathematical quasicrystals](#), in Quasicrystals: An introduction to structure, physical properties and applications, *Springer Ser. Materials Sci.*, Vol. 55. Springer, Berlin, 2002, 17–48, [arXiv:math-ph/9901014](#).
- [2] Baake M., Grimm U., [Aperiodic order. Vol. 1](#), *Encyclopedia Math. Appl.*, Vol. 149, Cambridge University Press, Cambridge, 2013.
- [3] Baake M., Hermisson J., Pleasants P.A.B., [The torus parametrization of quasiperiodic LI-classes](#), *J. Phys. A* **30** (1997), no. 9, 3029–3056.
- [4] Baake M., Kramer P., Schlottmann M., Zeidler D., [Planar patterns with fivefold symmetry as sections of periodic structures in 4-space](#), *Internat. J. Modern Phys. B* **4** (1990), no. 15–16, 2217–2268.
- [5] Baake M., Lenz D., Moody R.V., [Characterization of model sets by dynamical systems](#), *Ergodic Theory Dynam. Systems* **27** (2007), no. 2, 341–382.
- [6] Bohr H., Almost periodic functions, Chelsea Publishing Co., New York, 1947, available at <https://archive.org/details/in.ernet.dli.2015.84535>.
- [7] de Bruijn N.G., [Algebraic theory of Penrose's nonperiodic tilings of the plane](#), *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.* **43** (1981), no. 1, 39–66.
- [8] Egan G., deBruijn applet: Mathematical Details, 2008, available at <https://www.gregegan.net/APPLETS/12/deBruijnNotes.html>.

- [9] Glouser G., Cut and project tiling applet on Github, 2018, available at <https://gglouser.github.io/cut-and-project-tiling/>.
- [10] Kender T.K., Corrias M., Franchini C., [Automatic determination of quasicrystalline patterns from microscopy images](#), *Adv. Intell. Discov.* **2025** (2025), e2500043, 8 pages, [arXiv:2503.05472](#).
- [11] Le Page Y., [Computer derivation of the symmetry elements implied in a structure description](#), *J. Appl. Crystallogr.* **20** (1987), no. 3, 264–269.
- [12] Liu C., Kitahara K., Ishikawa A. et al., [Quasicrystals predicted and discovered by machine learning](#), *Phys. Rev. Mater.* **7** (2023), 093805, 9 pages.
- [13] Meyer Y., Algebraic numbers and harmonic analysis, *North-Holland Math. Library*, Vol. 2, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1972.
- [14] Moody R.V., Nesterenko M., Patera J., [Computing with almost periodic functions](#), *Acta Crystallogr. Sect. A* **64** (2008), no. 6, 654–669, [arXiv:0808.1814](#).
- [15] Moody R.V., Patera J., [Quasicrystals and icosians](#), *J. Phys. A* **26** (1993), no. 12, 2829–2853.
- [16] Oğuz E.C., Socolar J.E.S., Steinhardt P.J., Torquato S., [Hyperuniformity of quasicrystals](#), *Phys. Rev. B* **95** (2017), 054119, 10 pages.
- [17] Palatinus L., Chapuis G., [SUPERFLIP — a computer program for the solution of crystal structures by charge flipping in arbitrary dimensions](#), *J. Appl. Crystallogr.* **40** (2007), no. 4, 786–790.
- [18] Petrache M., Viera R., [Almost sure recovery in quasi-periodic structures](#), *J. Stat. Phys.* **190** (2023), no. 2, 39, 26 pages, [arXiv:2112.11613](#).
- [19] Radin C., Wolff M., [Space tilings and local isomorphism](#), *Geom. Dedicata* **42** (1992), no. 3, 355–360.
- [20] Schlottmann M., Generalized model sets and dynamical systems, in Directions in mathematical quasicrystals, *CRM Monogr. Ser.*, Vol. 13, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000, 143–159.
- [21] Socolar J.E.S., Steinhardt P.J., Levine D., [Quasicrystals with arbitrary orientational symmetry](#), *Phys. Rev. B* **32** (1985), 5547–5550.
- [22] Tatham S., Finite-state transducers for substitution tilings, [arXiv:2512.16595](#).
- [23] Yakir O., [Recovering the lattice from its random perturbations](#), *Int. Math. Res. Not. IMRN* **2022** (2022), no. 8, 6243–6261, [arXiv:2002.01508](#).
- [24] Zwart P., Grosse-Kunstleve R., Adams P., Exploring metric symmetry, Lawrence Berkeley National Laboratory, available at <https://escholarship.org/uc/item/7ch589hv>.

Interactive torus parametrization of the one-dimensional Fibonacci quasicrystal

*Mykhailo O. KORESHKOV*¹

E-mail: mykhailo.koreshkov@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-1968-0580>

Maryna O. NESTERENKO^{1,2}

E-mail: maryna.nesterenko@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6352-2365>

¹⁾ *Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine*

²⁾ *University “Kyiv School of Economics”, Kyiv, Ukraine*

Received April 9, 2026, in the final form June 26, 2026

<https://doi.org/10.3842/kau.2026.math.01>

Abstract. The paper presents an overview of the theory of mathematical quasicrystals and demonstrates the developed interactive Python software for studying certain one-dimensional quasicrystals (the Fibonacci quasicrystal). The mathematical framework underlying research in the field is described: diffraction measure, the cut-and-project scheme, local indistinguishability, topology on Delone sets. The intuitive concept of the local hull of a quasicrystal and its torus parametrization is introduced. The Fibonacci quasicrystal and its local hull are considered in more detail. An overview of other software and computational algorithms related to the study, construction, and visualization of quasicrystals is presented, along with an outline of directions for future research. The software is developed in the Jupyter Notebook format and available via the link.

Keywords: mathematical quasicrystals; cut-and-project; local hull; torus parametrization; Python.