

Лінійне та квадратичне програмування для відновлення розрідженого сигналу

Анастасія О. СТОРОЖЕНКО^{1,2}

E-mail: ana.storozhenko2701@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-3050-4551>

Петро І. СТЕЦІУК²

E-mail: stetsyukp@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4036-2543>

¹⁾ Київський академічний університет, Україна

²⁾ Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна

Отримано 9 квітня 2026, у фінальній формі 1 червня 2026

<https://doi.org/10.3842/kau.2026.math.02>

Анотація. У роботі розглядається задача відновлення розрідженого сигналу за допомогою ℓ_1 -мінімізації. Показано, як задачу ℓ_1 -мінімізації (також відому як *basis pursuit*) можна перетворити на еквівалентну задачу лінійного програмування (ЛП), та наведено доведення еквівалентності цих двох задач. Проведено експериментальне порівняння сучасних розв'язувачів (Gurobi, HiGHS, CPLEX та Clarabel) для розв'язання ЛП-задачі на тестових даних, згенерованих відповідно до теоретичних гарантій відновлення для матриць з нормально розподіленими елементами. Результати показують, що відкритий розв'язувач Clarabel є конкурентоспроможною альтернативою пропрієтарним розв'язувачам за швидкістю. Також запропоновано метод перевірки єдиності отриманого розв'язку за допомогою допоміжної задачі квадратичного програмування зі строго опуклою цільовою функцією. Наведено геометричну інтерпретацію умов єдиності та продемонстровано застосування методу на прикладі матриці з цілочисельними елементами.

Ключові слова: розріджений сигнал; відновлення сигналу; лінійне програмування; квадратичне програмування.

1 Вступ

Нехай $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — невідомий вектор з не більш ніж s ненульовими елементами. Тоді задачею відновлення розрідженого сигналу (*compressed sensing*) є знаходження вектора $\mathbf{x}$ за заданим вектором $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ та матрицею $\mathbf{A} \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, які пов'язані рівнянням

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}. \quad (1)$$

При цьому $m < n$, тобто система є недовизначеною, а отже, цю задачу неможливо розв'язати звичайними методами лінійної алгебри. Однак, якщо вектор $\mathbf{x}$ є розрідженим, то його можна успішно відновити за допомогою оптимізаційних методів, а саме, розв'язавши наступну задачу ℓ_1 -мінімізації:

$$\mathbf{x}^* = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{x}\|_1 \text{ за обмежень } \mathbf{Ax} = \mathbf{b}. \quad (2)$$

Така задача відома в англійській літературі як *basis pursuit* і є однією з фундаментальних задач у теорії відновлення розріджених сигналів. Її розв'язок у загальному випадку не завжди є розрідженим розв'язком задачі (1), але за певних умов на матрицю $\mathbf{A}$ можна отримати гарантії відновлення. Одні з перших теоретичних результатів щодо гарантій

відновлення отримано в роботах [2, 5], що дало поштовх для подальших досліджень таких задач. Такі задачі природним шляхом виникають у обробці сигналів; серед прикладів застосувань — отримання медичних зображень (в першу чергу, МРТ), телекомунікації, радарні системи і багато інших [6].

2 Огляд літератури

Теоретична сторона задачі відновлення розрідженого вектора за лінійними вимірюваннями є добре дослідженою. Давно відомі детерміністичні критерії, яким має відповідати матриця $\mathbf{A}$ для успішного відновлення, найбільш популярним з яких є властивість обмеженої ізометричності (англійською — *restricted isometry property*) [2]. Оскільки на практиці важко перевіряти відповідність цим критеріям кожної окремої матриці вимірювань, існує також багато результатів, що дають імовірнісні гарантії [1, 3, 4] для певних класів матриць, наприклад, матриць з $\mathcal{N}(0, 1)$ -розподіленими елементами.

3 Відновлення розрідженого вектора за допомогою лінійного програмування

Задача (2) є нелінійною оптимізаційною задачею, але її можна перетворити на еквівалентну задачу лінійного програмування. Для цього введемо допоміжні змінні $y_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, які будуть представляти абсолютні значення відповідних компонентів вектора $\mathbf{x}$, тобто $y_i \geq |x_i|$. Тоді можна записати наступну задачу лінійного програмування:

$$\text{мінімізувати} \quad \sum_{i=1}^n y_i \quad (3)$$

$$\text{за обмежень} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (4)$$

$$-y_i \leq x_i \leq y_i, \quad (5)$$

$$y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (6)$$

Як бачимо, задача (3)–(6) має $2n$ змінних та $m + 3n$ обмежень, але має перевагу у тому, що існує багато ефективних і добре відомих алгоритмів для розв’язання задач лінійного програмування.

Твердження 1. *Задача лінійного програмування (3)–(6) є еквівалентною задачі (2).*

Доведення. Нехай $\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_1$ є розв’язком оригінальної задачі (2). Позначимо $\hat{\mathbf{y}} = (\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n)^T = (|\hat{x}_1|, \dots, |\hat{x}_n|)^T$. Тоді $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ очевидно є допустимою точкою (тобто такою, що задовольняє всі обмеження) для задачі лінійного програмування (3)–(6) і цільова функція досягає в ній того ж значення $\sum_{i=1}^n \hat{y}_i = \sum_{i=1}^n |\hat{x}_i|$. Це також оптимальний розв’язок, оскільки для будь-якої іншої допустимої точки $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ маємо $\sum_{i=1}^n y_i \geq \sum_{i=1}^n |x_i| \geq \sum_{i=1}^n |\hat{x}_i| = \sum_{i=1}^n \hat{y}_i$.

Нехай тепер $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ є оптимальним розв’язком задачі лінійного програмування (3)–(6). Тоді $\hat{\mathbf{x}}$ є допустимим для оригінальної задачі (2). Для значення цільової функції, маємо, з одного боку, $\sum_{i=1}^n \hat{y}_i \geq \sum_{i=1}^n |\hat{x}_i|$. З іншого боку, якщо розглянути допустиму точку $(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y})$ з $y_i = |\hat{x}_i|$, то маємо $\sum_{i=1}^n \hat{y}_i \leq \sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n |\hat{x}_i|$. Ці дві нерівності разом означають, що $\sum_{i=1}^n \hat{y}_i = \sum_{i=1}^n |\hat{x}_i|$, і таким чином $\hat{\mathbf{x}}$ є точкою мінімуму для оригінальної задачі (2) з тим самим значенням цільової функції. $\square$

Для розв’язання задачі (3)–(6) було перевірено декілька сучасних розв’язувачів, а саме: Gurobi [8], HiGHS [9], CPLEX [10] та Clarabel [7]. Результати тестів наведено у табл. 1.

Табл. 1. Порівняння різних розв'язувачів для $n = 5000$.

ρ	m	test	CPLEX		HiGHS		Gurobi		Clarabel	
			t, s	$\ \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^*\ _2$	t, s	$\ \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^*\ _2$	t, s	$\ \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^*\ _2$	t, s	$\ \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^*\ _2$
0,01	790	0	31,6	1,73e-12	48	1,02e-08	22,4	1,22e-12	11,5	8,16e-08
		1	29,6	4,85e-12	44,4	5,61e-12	5,7	5,80e-12	11,6	9,65e-08
		2	31	3,94e-12	46,9	5,27e-10	5,76	6,90e-12	12,8	2,95e-07
		3	31,2	5,90e-12	44,1	3,98e-07	5,8	4,06e-12	12,5	1,13e-08
		4	29,3	4,22e-12	46,9	8,48e-08	5,81	6,53e-12	11,3	9,00e-08
0,05	1510	0	84,7	1,11e-11	2183	1,22e-10	81,1	6,69e-12	38,8	5,49e-08
		1	84,9	1,17e-11	169	2,73e-09	80,5	2,24e-12	39,8	5,76e-08
		2	84,8	1,17e-11	192	2,89e-10	29,5	1,16e-11	37,8	1,53e-07
		3	84	1,19e-11	170	8,73e-09	80,6	3,16e-12	38,6	1,33e-06
		4	84,7	1,04e-11	163	5,73e-08	80,5	3,49e-11	41,1	6,12e-08
0,1	2140	0	158	1,60e-11	589	1,58e-09	143	1,30e-11	89,8	8,53e-07
		1	159	1,53e-11	396	9,44e-11	151	8,23e-12	90,3	1,08e-07
		2	164	1,43e-11	383	6,54e-09	50,5	1,84e-11	89,8	3,64e-07
		3	160	1,62e-11	590	7,66e-08	139	8,75e-12	89,8	1,37e-07
		4	159	1,54e-11	384	3,19e-10	140	1,45e-11	89,6	4,75e-06

Тестові приклади було згенеровано відповідно до теоретичних гарантій відновлення вектора для матриць з нормально розподіленими елементами, наведених у [1]. Було випадковим чином згенеровано п'ять пар $(\mathbf{A}, \mathbf{x}^*)$ для кожного ступеня розрідженості $\rho = \frac{s}{n}$. Вектор $\mathbf{b}$ було обчислено як $\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}^*$. Після цього до кожного набору даних було застосовано кожний із розв'язувачів 5 разів, отримані вимірювання було усереднено і зведено у таблицю.

Як бачимо, всі розв'язувачі успішно впорались із відновленням вектора, а за часом виконання найкраще себе показали Gurobi та Clarabel. При цьому бачимо, що час виконання для Clarabel був приблизно однаковим для всіх тестових прикладів, у той час як Gurobi має різну швидкість збіжності на різних даних. З цього можемо зробити висновки, що Clarabel є швидкою та надійною альтернативою пропріетарним розв'язувачам для розв'язку лінійної задачі відновлення розрідженого вектора.

4 Перевірка єдиності розв'язку за допомогою квадратичного програмування

У попередньому параграфі ми працювали із випадковими даними, покладаючись на теоретичні гарантії відновлення для випадкових матриць, але варто також розглянути випадки, коли знайдений розв'язок може не бути єдиним. Для цього спочатку необхідно відмітити, за яких саме умов розв'язок задачі (2) може бути неунікальним. Введемо для цього допоміжне визначення та твердження.

Означення 2. Конус спадання $\mathcal{D}(f, \mathbf{x})$ опуклої функції $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ у точці $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ визначається як

$$\mathcal{D}(f, \mathbf{x}) = \bigcup_{\tau > 0} \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x} + \tau \mathbf{z}) \leq f(\mathbf{x})\}.$$

Твердження 3. Вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ є єдиним розв'язком задачі (2) за $\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ тоді й лише тоді, коли $\mathcal{D}(\|\cdot\|_1, \mathbf{x}) \cap \text{Ker } \mathbf{A} = \{\mathbf{0}\}$.

Таке твердження є класичним результатом у теорії відновлення розріджених сигналів, який можна знайти, наприклад, у [1]. Така геометрична інтерпретація є дуже корисною

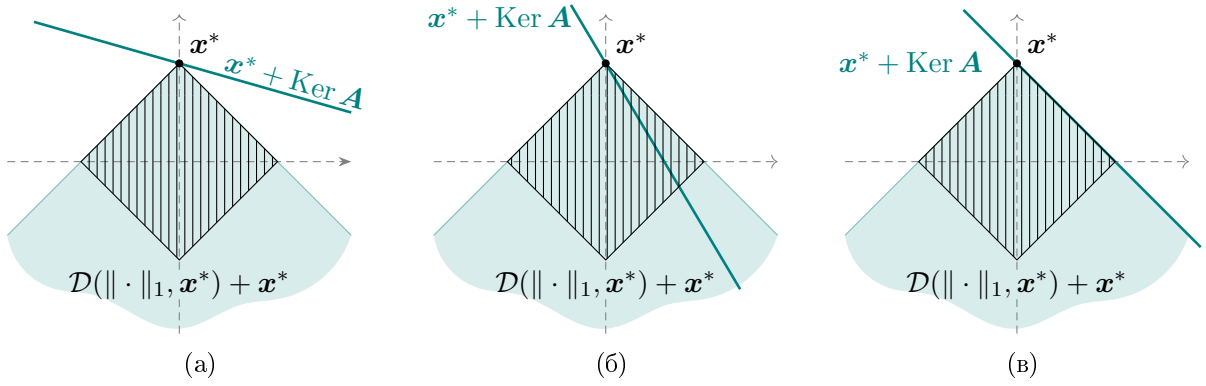


Рис. 1. Зафарбована ділянка показує конус спадання ℓ_1 -норми в точці $\mathbf{x}^*$ (для наочності центр конусу зміщено на $\mathbf{x}^*$); заштрихована ділянка є множиною векторів, для яких норма є меншою порівняно з $\mathbf{x}^*$. У випадку (а) маємо єдиний розв'язок задачі, що збігається з вектором $\mathbf{x}^*$. У випадку (б) маємо розв'язок із меншою ℓ_1 -нормою, ніж $\mathbf{x}^*$. У випадку (в) маємо декілька розв'язків із такою ж ℓ_1 -нормою, що і $\mathbf{x}^*$.

для розуміння того, чому певні матриці $\mathbf{A}$ забезпечують однозначне і успішне відновлення, а інші — ні. Візуалізація цього твердження у двовимірному випадку наведена на рис. 1; з неї бачимо, що «патологічні» випадки можна поділити на два типи: або ядро матриці $\mathbf{A}$ перетинає внутрішність конуса спадання (рис. 1 (б)), або перетинає лише його межу у точці, відмінній від $\mathbf{0}$ (рис. 1 (в)). У першому випадку існуватиме вектор $\mathbf{z}$ такий, що $\mathbf{Az} = \mathbf{b}$ і $\|\mathbf{z}\|_1 < \|\mathbf{x}\|_1$, а отже, $\mathbf{x}$ не буде розв'язком задачі (2). У другому ж випадку існуватимуть відмінні від $\mathbf{x}$ розв'язки задачі (2) з такою ж ℓ_1 -нормою.

Нескладно побачити, що для матриць, отриманих з неперервних розподілів, випадок перетину ядра з внутрішністю конуса спадання трапляється з ймовірністю нуль, а отже, розв'язок задачі (2) буде єдиним майже напевно. Однак, якщо матриця $\mathbf{A}$ має іншу структуру (наприклад, її елементи мають дискретний розподіл), то така ситуація стає можливою. Для перевірки єдиності розв'язку, отриманого з лінійної задачі (3)–(6), можна розв'язати наступну допоміжну задачу квадратичного програмування:

$$\text{мінімізувати} \quad \sum_{i=1}^n y_i^2 \quad (7)$$

$$\text{за обмежень} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad (8)$$

$$-y_i \leq x_i \leq y_i, \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = \hat{f}, \quad (10)$$

$$y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (11)$$

де $\hat{f}$ — оптимальне значення цільової функції, отримане при розв'язанні задачі (3)–(6). Така задача має єдиний розв'язок за умови сумісності обмежень, оскільки цільова функція є строго опуклою, а множина допустимих точок — опуклою.

Твердження 4. Розв'язок задачі (7)–(11) є також розв'язком задачі (3)–(6).

Доведення. Нехай $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ є оптимальним розв'язком задачі (7)–(11). Тоді $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ є допустимим для задачі (3)–(6) і в цій точці цільова функція задачі (3)–(6) досягає значення $\sum_{i=1}^n \hat{y}_i = \hat{f}$. Ми визначили $\hat{f}$ як оптимальне значення цільової функції задачі (3)–(6), отже $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ є також оптимальним для задачі (3)–(6). $\square$

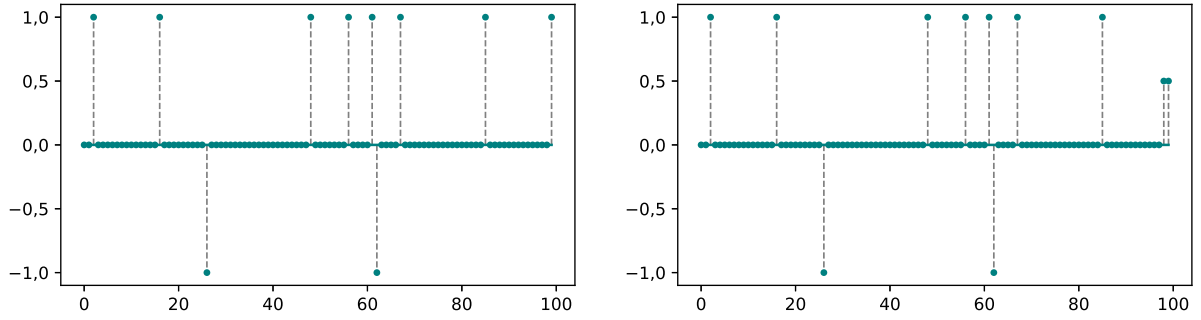


Рис. 2. Приклад тесту на єдиність розв'язку задачі (3)–(6) для випадкової матриці з випадковими цілочисельними елементами від -10 до 10 та двома лінійно залежними стовпцями. Зліва представлені значення розв'язку ЛП-задачі, який співпадає з вектором $\mathbf{x}^*$. Справа — розв'язок задачі квадратичного програмування, який відрізняється від попереднього вектора, що свідчить про неунікальність розв'язку ЛП-задачі.

Таким чином, якщо розв'язок задачі (7)–(11) не збігається з розв'язком задачі (3)–(6), то розв'язок задачі (3)–(6) не є єдиним. Якщо ж розв'язки збігаються, то ніяких висновків щодо єдиності розв'язку задачі (3)–(6) зробити не можна, оскільки у випадку неунікальності отриманий чисельно розв'язок задачі лінійного програмування може просто співпасти з розв'язком задачі (7)–(11). Також варто зауважити, що в такому випадку отриманий розв'язок ЛП-задачі буде різнитись залежно від конкретного алгоритму оптимізації.

На практиці замість рівності у обмеженні (10) варто використовувати дві нерівності:

$$\sum_{i=1}^n y_i \leq \hat{f} + \varepsilon \quad \text{та} \quad \sum_{i=1}^n y_i \geq \hat{f} - \varepsilon,$$

оскільки чисельно отримане значення $\hat{f}$ не буде точним. Відповідно, збігатись розв'язки теж будуть лише з певною точністю, що необхідно враховувати при інтерпретації результатів.

Приклад такого тесту зображено на рис. 2. Для нього було штучним чином створено матрицю $\mathbf{A}$ такою, що відповідна задача матиме багато розв'язків, а потім було застосовано описаний тест на єдиність розв'язку. Як бачимо, розв'язки задачі (3)–(6) та (7)–(11) помітно відрізняються, що свідчить про неунікальність розв'язку задачі (3)–(6).

5 Висновки

У цій роботі розглянуто задачу лінійного програмування для відновлення розрідженого вектора та допоміжну задачу квадратичного програмування для перевірки єдиності розв'язку. З результатів тестування різних розв'язувачів для лінійного програмування ми бачимо, що Clagabel є швидкою та надійною альтернативою пропріетарним розв'язувачам для вирішення поставленої задачі, хоча й з меншою точністю, принаймні без додаткових налаштувань параметрів розв'язувача. Також розглянуто геометричну інтерпретацію умови єдиності розв'язку задачі (2) та запропоновано тест на єдиність розв'язку, який базується на розв'язанні допоміжної задачі квадратичного програмування. Такий тест дозволяє виявити випадки, коли розв'язок задачі (2) не є єдиним, що може бути важливою інформацією при інтерпретації результатів відновлення. Втім, він не надає ніяких гарантій щодо єдиності розв'язку, якщо отримані розв'язки збігаються. Цікавими напрямками для подальших досліджень є знаходження оцінки ймовірності неунікальності розв'язку для матриць із дискретними елементами та пошук більш надійних тестів на єдиність розв'язку.

Список використаних джерел

- [1] Amelunxen D., Lotz M., McCoy M.B., Tropp J.A., [Living on the edge: Phase transitions in convex programs with random data](#), *Inf. Inference* **3** (2014), no. 3, 224–294.
- [2] Candes E., Tao T., [Decoding by linear programming](#), *IEEE Trans. Inform. Theory* **51** (2005), no. 12, 4203–4215.
- [3] Candes E.J., Plan Y., A probabilistic and RIPless theory of compressed sensing, [arXiv:1011.3854](#).
- [4] Chandrasekaran V., Recht B., Parrilo P.A., Willsky A.S., [The convex geometry of linear inverse problems](#), *Found. Comput. Math.* **12** (2012), no. 6, 805–849.
- [5] Donoho D., [Compressed sensing](#), *IEEE Trans. Inform. Theory* **52** (2006), no. 4, 1289–1306.
- [6] Foucart S., Rauhut H., [A mathematical introduction to compressive sensing](#), *Appl. Numer. Harmon. Anal.*, Birkhäuser, New York, 2013.
- [7] Goulart P.J., Chen Y., Clarabel: An interior-point solver for conic programs with quadratic objectives, [arXiv:2405.12762](#).
- [8] Gurobi Optimization, LLC, Gurobi optimizer reference manual, 2026, available at <https://www.gurobi.com>.
- [9] Huangfu Q., Hall J.A.J., [Parallelizing the dual revised simplex method](#), *Math. Program. Comput.* **10** (2018), no. 1, 119–142.
- [10] IBM ILOG, CPLEX optimization studio documentation, 2026, available at <https://www.ibm.com/docs/en/icos>.

Linear and quadratic programming for sparse signal recovery

Anastasiia O. STOROZHENKO ^{1,2}

E-mail: ana.storozhenko2701@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-3050-4551>

Petro I. STETSYUK ²

E-mail: stetsyukp@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4036-2543>

¹⁾ *Kyiv Academic University, Ukraine*

²⁾ *V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine*

Received April 9, 2026, in the final form June 1, 2026

<https://doi.org/10.3842/kau.2026.math.02>

Abstract. In this work, we consider the problem of sparse signal recovery known as compressed sensing using ℓ_1 -minimization. We show how the ℓ_1 -minimization problem (also known as basis pursuit) can be transformed into an equivalent linear programming (LP) problem, and provide a proof of the equivalence of these two problems. We conduct an experimental comparison of modern solvers (Gurobi, HiGHS, CPLEX, and Clarabel) for solving the LP problem on test data generated according to theoretical recovery guarantees for matrices with normally distributed elements. The results show that the open-source solver Clarabel is a competitive alternative to proprietary solvers in terms of speed. We also propose a method for verifying the uniqueness of the obtained solution using an auxiliary quadratic programming problem with a strictly convex objective function. A geometric interpretation of the uniqueness conditions is provided, and the application of the method is demonstrated on an example of a matrix with integer elements.

Keywords: sparse signal; compressed sensing; linear programming; quadratic programming.