

Розробка h -адаптивного методу скінченних елементів з кусково квадратичними апроксимаціями в задачі статички циліндричних оболонок

Павло О. МАЛАШНЯК

E-mail: pavlo.malashnyak@lnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-0343-8377>

Львівський національний університет імені Івана Франка, Україна

Отримано 31 березня 2026, у фінальній формі 16 червня 2026

<https://doi.org/10.3842/kau.2026.math.03>

Анотація. У статті розглядається числова методика розв'язання варіаційної задачі статички циліндричної оболонки Тимошенка під дією осесиметричних навантажень. З метою уникнення трудомісткого числового інтегрування подано алгебричні вирази внесків кожного скінченного елемента до блочно тридіагональної системи лінійних алгебричних рівнянь МСЕ для квадратичних базисних функцій. Для контролю якості знайдених наближень запропоновано поелементно визначений апостеріорний оцінювач похибок (АОП) залишкового гатунку, індикатори якого засновані на кубічних поліномах із коефіцієнтами, пропорційними кубу довжини скінченного елемента, що відтворюють наближені значення третіх похідних зміщень у центрах елементів. Ефективність та надійність запропонованої методики підтверджено результатами числових експериментів для жорстко защемленої оболонки з примежовими шарами в околах її торців: аналіз збіжності апроксимацій на рівномірно згущуваних сітках демонструє здатність АОП надійно відтворювати істинні похибки МСЕ в енергетичній нормі.

Ключові слова: метод скінченних елементів; циліндрична оболонка; квадратичні апроксимації; апостеріорний оцінювач похибок; h -адаптивність; енергетична норма

1 Вступ

Циліндричні оболонки є одним із найпоширеніших елементів конструкцій у механічному та цивільному будівництві, аерокосмічній та хімічній промисловості. Математичне моделювання їхнього напружено-деформованого стану за осесиметричних навантажень у рамках теорії Тимошенка зводиться до варіаційної задачі, коректність якої та критерії сингулярної збуреності детально досліджено в [5]. Наявність примежових шарів, що виникають за певних умов навантаження та закріплення торців, суттєво ускладнює числовий аналіз задачі, оскільки апроксимації розв'язку в таких регіонах супроводжуються великими значеннями похибок.

Метод скінченних елементів (МСЕ) є одним з основних інструментів числового розв'язання таких задач, див., напр., [2–4, 12–14, 16]. Проте за наявності сингулярних збурень якість знайдених апроксимацій вимагає надійного контролю. З цією метою теорія та практика МСЕ була доповнена концепцією апостеріорного оцінювання похибок [7], яка дістала розвиток в інженерних та наукових обчисленнях, див. [1, 8–11, 13–15, 17, 18].

У цій статті ми будемо (i) обчислювальну схему МСЕ з квадратичними апроксимаціями вектора узагальнених зміщень оболонки та (ii) поелементно визначений АОП залишкового гатунку на основі кубічних поліномів. Стаття організована таким чином. У п. 2 нагадуємо формулювання варіаційної задачі. У п. 3 подаємо схему МСЕ з квадратичними базисними функціями та аналітично обчисленими коефіцієнтами матриці жорсткості. У п. 4 будемо АОП та наводимо аналітичний вигляд коефіцієнтів його індикаторів. У п. 5 наводимо апостеріорні оцінки збіжності та результати числових експериментів. Висновки підсумовують одержані результати.

2 Постановка задачі та позначення

Розглянемо варіаційну задачу про статичне навантаження циліндричної оболонки, яка в термінах статті [5] при $h > 0$, $\frac{h}{R} \ll 1$, описується таким чином: *знайти вектор узагальнених пружних зміщень*

$$\psi = \{u, w, \gamma\} \in \Phi := \{\varphi = \{v, y, \xi\} \in [H^1(\Omega)]^3 \mid \varphi(0) = 0\}$$

такий, що

$$\Pi(\psi, \varphi) = \langle l, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \Phi, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \Pi(\psi, \varphi) := & \int_0^L B[(u'v' + R^{-2}wy) + \nu R^{-1}(wv' + u'y)] dz \\ & + \int_0^L [B_c(w' + \gamma)(y' + \xi) + D\gamma'\xi'] dz \quad \forall \psi, \varphi \in \Phi, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\langle l, \varphi \rangle := \int_0^L (f_1v + f_3y + f_4\xi) dz + \bar{N}_1v(L) + \bar{N}_3y(L) + \bar{M}_1\xi(L) \quad \forall \varphi \in \Phi; \quad (3)$$

за фізичним змістом даних цієї задачі див. [15]. Там же показано, що задача (1)–(3) має єдиний розв'язок $\psi \in \Phi$, див. [5], який неперервно залежить від даних задачі у енергетичній нормі простору допустимих зміщень Φ :

$$\|\varphi\|_{\Pi} := \Pi^{1/2}(\varphi, \varphi) \quad \forall \varphi \in \Phi.$$

Стандартна процедура МСЕ розв'язання задачі (1)–(3) приводить до відшукування її наближеного розв'язку із дискретного аналогу задачі:

$$\text{задано } \Phi_h := \text{span} \left[\left\{ \begin{pmatrix} \varphi_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi_i \end{pmatrix} \right\}_{i=1}^N \right] \subset \Phi;$$

знайти $\psi_h \in \Phi_h$ такий, що

$$\Pi(\psi_h, \varphi) = \langle l, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \Phi_h. \quad (4)$$

Аналіз обчисленої в (4) апроксимації $\psi_h \in \Phi_h$ крім звичних засобів числового моделювання у вигляді таблиць та графіків будемо доповнювати наближеними оцінками похибок, заснованими на апостеріорних оцінювачах похибки.

3 Квадратичні апроксимації на скінченному елементі

Візьмемо натуральне $N > 1$ і за допомогою сітки вузлів $0 < z_1 < \dots < z_{i-1} < \dots < z_N = L$ створимо поділ $I_h = \{K_{i+\frac{1}{2}}\}_0^{N-1}$ відрізка $[0, L]$ на скінченні елементи $K_{i+\frac{1}{2}} := [z_i, z_{i+1}]$, $i = 0, \dots, N-1$. Тут і далі дробовим індексом будемо позначати як номер скінченного елемента $K_{i+\frac{1}{2}}$ так і його центр $z_{i+\frac{1}{2}} = \frac{z_i + z_{i+1}}{2}$ та діаметр $h_{i+\frac{1}{2}} = z_{i+1} - z_i$. Параметр $h = \max_{0 \leq i \leq N-1} h_{i+\frac{1}{2}}$ називатимемо діаметром поділу I_h .

Щоб уніфікувати визначення базисних функцій МСЕ та необхідних обчислень на кожному такому елементі $K_{i+\frac{1}{2}}$, вводимо локальну координату ξ згідно правила:

$$z = z(\xi) := \frac{1}{2}(1 - \xi)z_i + \frac{1}{2}(1 + \xi)z_{i+1} = \theta(\xi)z_i + \omega(\xi)z_{i+1} = z_{i+\frac{1}{2}} + h_{i+\frac{1}{2}}\xi \quad \forall \xi \in [-1, 1].$$

Тут і далі використовуються позначення

$$\theta(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad \omega(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi).$$

Введення локальних змінних дає можливість на елементі $K_{i+\frac{1}{2}}$ перейти від змінної z до змінної ξ на відрізку $[-1, 1]$ при обчисленні інтеграла і похідної:

$$\int_{z_i}^{z_{i+1}} f(z) dz = h_{i+\frac{1}{2}} \int_{-1}^1 f(z(\xi)) d\xi, \quad \frac{df(z)}{dz} = \frac{2}{h_{i+\frac{1}{2}}} \frac{df(z(\xi))}{d\xi}.$$

Для розв'язування задачі (4) використаємо квадратичні базисні функції. На кожному скінченному елементі $K_{i+\frac{1}{2}}$ функції u , w , γ апроксимуємо у вигляді:

$$\begin{aligned} u_{h_i}[z(\xi)] &= \{2\theta(\xi)[\theta(\xi) - \tfrac{1}{2}]\}u_i + \{4\omega(\xi)\theta(\xi)\}u_{i+\frac{1}{2}} + \{2\omega(\xi)[\omega(\xi) - \tfrac{1}{2}]\}u_{i+1}, \\ w_{h_i}[z(\xi)] &= \{2\theta(\xi)[\theta(\xi) - \tfrac{1}{2}]\}w_i + \{4\omega(\xi)\theta(\xi)\}w_{i+\frac{1}{2}} + \{2\omega(\xi)[\omega(\xi) - \tfrac{1}{2}]\}w_{i+1}, \\ \gamma_{h_i}[z(\xi)] &= \{2\theta(\xi)[\theta(\xi) - \tfrac{1}{2}]\}\gamma_i + \{4\omega(\xi)\theta(\xi)\}\gamma_{i+\frac{1}{2}} + \{2\omega(\xi)[\omega(\xi) - \tfrac{1}{2}]\}\gamma_{i+1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Для зручності обчислення матриці жорсткості скінченного елемента $K_{i+\frac{1}{2}}$ запишемо (5) у матрично-векторному вигляді

$$\psi_{h_i} = \mathbf{N}_h \mathbf{q}_h, \quad (6)$$

де

$$\mathbf{N}_h = \begin{bmatrix} g_1 & 0 & 0 & g_2 & 0 & 0 & g_3 & 0 & 0 \\ 0 & g_1 & 0 & 0 & g_2 & 0 & 0 & g_3 & 0 \\ 0 & 0 & g_1 & 0 & 0 & g_2 & 0 & 0 & g_3 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$\mathbf{q}_h^T = [u_i, w_i, \gamma_i, u_{i+\frac{1}{2}}, w_{i+\frac{1}{2}}, \gamma_{i+\frac{1}{2}}, u_{i+1}, w_{i+1}, \gamma_{i+1}], \quad (8)$$

$$g_1 = 2\theta(\theta - \tfrac{1}{2}), \quad g_2 = 4\omega\theta, \quad g_3 = 2\omega(\omega - \tfrac{1}{2}). \quad (9)$$

Враховуючи представлення (6)–(9), матриця $\mathbf{K}_{ei}$ для випадку квадратичних апроксимацій запишеться у вигляді

$$\mathbf{K}_{ei} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ei}^{11} & \mathbf{K}_{ei}^{12} & \mathbf{K}_{ei}^{13} \\ \mathbf{K}_{ei}^{21} & \mathbf{K}_{ei}^{22} & \mathbf{K}_{ei}^{23} \\ \mathbf{K}_{ei}^{31} & \mathbf{K}_{ei}^{32} & \mathbf{K}_{ei}^{33} \end{bmatrix},$$

де

$$K_{ei}^{ij} = \begin{bmatrix} B \frac{dg_i}{dz} \frac{dg_j}{dz} & \frac{B\nu}{R} \frac{dg_i}{dz} g_j & 0 \\ \frac{B\nu}{R} g_i \frac{dg_j}{dz} & B_c \frac{dg_i}{dz} \frac{dg_j}{dz} + \frac{B}{R^2} g_i g_j & B_c \frac{dg_i}{dz} g_j \\ 0 & B_c g_i \frac{dg_j}{dz} & B_c g_i g_j + D \frac{dg_i}{dz} \frac{dg_j}{dz} \end{bmatrix}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Обчисливши інтеграли $\int_{z_i}^{z_{i+1}} \mathbf{K}_{ei} dz$, отримаємо значення матриці елемента $\mathbf{K}_e$:

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11} & \mathbf{k}_{12} & \mathbf{k}_{13} \\ \mathbf{k}_{21} & \mathbf{k}_{22} & \mathbf{k}_{23} \\ \mathbf{k}_{31} & \mathbf{k}_{32} & \mathbf{k}_{33} \end{bmatrix}.$$

Враховуючи симетричність матриці $\mathbf{K}_e$, запишемо значення верхньої половини матриці:

$$\mathbf{k}_{11} = \begin{bmatrix} \frac{7B}{3h_{i+\frac{1}{2}}} & -\frac{B\nu}{2R} & 0 \\ -\frac{B\nu}{2R} & \frac{7B_c}{3h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{2Bh_{i+\frac{1}{2}}}{15R^2} & -\frac{B_c}{2} \\ 0 & -\frac{B_c}{2} & \frac{2B_ch_{i+\frac{1}{2}}}{15} + \frac{7D}{3h_{i+\frac{1}{2}}} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_{12} &= \begin{bmatrix} -\frac{8B}{3h_{i+\frac{1}{2}}} & -\frac{2B\nu}{3R} & 0 \\ \frac{2B\nu}{3R} & -\frac{8B_c}{3h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{Bh_{i+\frac{1}{2}}}{15R^2} & -\frac{2B_c}{3} \\ 0 & \frac{2B_c}{3} & \frac{B_ch_{i+\frac{1}{2}}}{15} - \frac{8D}{3h_{i+\frac{1}{2}}} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{k}_{13} &= \begin{bmatrix} \frac{B}{3h_{i+\frac{1}{2}}} & \frac{B\nu}{6R} & 0 \\ -\frac{B\nu}{6R} & \frac{B_c}{3h_{i+\frac{1}{2}}} - \frac{Bh_{i+\frac{1}{2}}}{30R^2} & \frac{B_c}{6} \\ 0 & -\frac{B_c}{6} & -\frac{B_ch_{i+\frac{1}{2}}}{30} + \frac{D}{3h_{i+\frac{1}{2}}} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{k}_{22} &= \begin{bmatrix} \frac{16B}{3h_{i+\frac{1}{2}}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{16B_c}{3h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{8Bh_{i+\frac{1}{2}}}{15R^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8B_ch_{i+\frac{1}{2}}}{15} + \frac{16D}{3h_{i+\frac{1}{2}}} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{k}_{23} &= \begin{bmatrix} -\frac{8B}{3h_{i+\frac{1}{2}}} & -\frac{2B\nu}{3R} & 0 \\ \frac{2B\nu}{3R} & -\frac{8B_c}{3h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{Bh_{i+\frac{1}{2}}}{15R^2} & -\frac{2B_c}{3} \\ 0 & \frac{2B_c}{3} & \frac{B_ch_{i+\frac{1}{2}}}{15} - \frac{8D}{3h_{i+\frac{1}{2}}} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{k}_{33} &= \begin{bmatrix} \frac{7B}{3h_{i+\frac{1}{2}}} & \frac{B\nu}{2R} & 0 \\ \frac{B\nu}{2R} & \frac{7B_c}{3h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{2Bh_{i+\frac{1}{2}}}{15R^2} & \frac{B_c}{2} \\ 0 & \frac{B_c}{2} & \frac{2B_ch_{i+\frac{1}{2}}}{15} + \frac{7D}{3h_{i+\frac{1}{2}}} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Лінійний функціонал (6) для випадку апроксимацій (5) запишеться у вигляді

$$\mathbf{F}_e^T = \int_{z_i}^{z_{i+1}} \mathbf{N}_h^T \mathbf{f} \, dz = \frac{h_{i+\frac{1}{2}}}{6} [f_1, f_3, f_4, 4f_1, 4f_3, 4f_4, f_1, f_3, f_4].$$

4 Апостеріорний оцінювач похибки частинами квадратичних апроксимацій

Нехай на поділі I_h обчислено апроксимацію

$$\psi_h = \sum_{i=0}^{N-1} \psi_{h_i}$$

розв'язку задачі (4). Тоді похибку знайденої апроксимації $\mathbf{e} = \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}_h$ можемо визначити як розв'язок задачі про лишок:

$$\begin{cases} \text{знайти похибку } \mathbf{e} \in E, & V = V_h \oplus E \text{ таку,} \\ \text{щоб } \Pi(\mathbf{e}, \boldsymbol{\varphi}) = \langle l, \boldsymbol{\varphi} \rangle - \Pi(\boldsymbol{\psi}_h, \boldsymbol{\varphi}) & \forall \boldsymbol{\varphi} \in E. \end{cases} \quad (10)$$

З огляду на те, що $\dim E = +\infty$, для знаходження наближеного розв'язку задачі (10) — апостеріорного оцінювача похибки (АОП) $\boldsymbol{\varepsilon}_h = \boldsymbol{\varepsilon}_h(z)$ — використовуємо дискретизацію Галльоркіна:

$$\begin{cases} \text{задано } E_h \subset E, & \dim E_h = N = \text{card}(I_h); \\ \text{знайти } \boldsymbol{\varepsilon}_h \in E_h \text{ такий, що} \\ \Pi(\boldsymbol{\varepsilon}_h, \boldsymbol{\varphi}) = \langle l, \boldsymbol{\varphi} \rangle - \Pi(\boldsymbol{\psi}_h, \boldsymbol{\varphi}) & \forall \boldsymbol{\varphi} \in E_h. \end{cases} \quad (11)$$

Формулювання задачі (11) дозволяє оптимізувати обчислення АОП:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_h(z) = \sum_{i=0}^{N-1} \boldsymbol{\varepsilon}_{i+\frac{1}{2}}(z) = \sum_{i=0}^{N-1} \boldsymbol{\lambda}_{i+\frac{1}{2}} \phi_{i+\frac{1}{2}}(z) \quad \forall z \in [0, L]. \quad (12)$$

У випадку квадратичних апроксимацій для представлення похибки (12) використовуємо кубічні поліноми

$$\phi_{i+\frac{1}{2}}(z(\xi)) = \theta(\xi) \omega(\xi) [\theta(\xi) - \omega(\xi)].$$

Коефіцієнти розвинення (12) у цьому випадку обчислюються наступним чином. Запишемо вектор $\boldsymbol{\lambda}_{i+\frac{1}{2}}^\psi$ як

$$\boldsymbol{\lambda}_{i+\frac{1}{2}}^\psi = \mathbf{J} \mathbf{q}_h, \quad (13)$$

де $\mathbf{J} = [\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \mathbf{J}_3]$,

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{B\nu}{15R} & 0 \\ \frac{B\nu}{15R} & -\frac{Bh_{i+\frac{1}{2}}}{60R^2} & \frac{B_c}{15} \\ 0 & \frac{B_c}{15} & \frac{B_ch_{i+\frac{1}{2}}}{60} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$\mathbf{J}_2 = - \begin{bmatrix} 0 & \frac{2B\nu}{15R} & 0 \\ \frac{2B\nu}{15R} & 0 & -\frac{2B_c}{15} \\ 0 & -\frac{2B_c}{15} & 0 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$\mathbf{J}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{B\nu}{15R} & 0 \\ \frac{B\nu}{15R} & -\frac{Bh_{i+\frac{1}{2}}}{60R^2} & \frac{B_c}{15} \\ 0 & \frac{B_c}{15} & -\frac{B_ch_{i+\frac{1}{2}}}{60} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$\mathbf{A}_{ii} = \Pi(\phi_{i+\frac{1}{2}}, \phi_{i+\frac{1}{2}}) = \begin{bmatrix} \frac{B}{5h_{i+\frac{1}{2}}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{B_c}{5h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{Bh_{i+\frac{1}{2}}}{210R^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{B_ch_{i+\frac{1}{2}}}{210} + \frac{D}{5h_{i+\frac{1}{2}}} \end{bmatrix}. \quad (17)$$

З урахуванням (13)–(17) компоненти вектора $\lambda_{i+\frac{1}{2}}$ обчислюються за формулами

$$\lambda_{i+\frac{1}{2}}^u = -\frac{\lambda_{i+\frac{1}{2}}^{\psi 1}}{A_{\lambda}^{11}}, \quad \lambda_{i+\frac{1}{2}}^w = -\frac{\lambda_{i+\frac{1}{2}}^{\psi 2}}{A_{\lambda}^{22}}, \quad \lambda_{i+\frac{1}{2}}^{\gamma} = -\frac{\lambda_{i+\frac{1}{2}}^{\psi 3}}{A_{\lambda}^{33}}.$$

Для обчислення енергетичних норм індикаторів та самого АОП одержуємо вирази:

$$\begin{aligned} \|\epsilon_{i+1/2}\|_{\Pi}^2 &= \Pi(\epsilon_{i+1/2}, \epsilon_{i+1/2}) = \Pi_{11}\lambda_u^2 + \Pi_{22}\lambda_w^2 + \Pi_{33}\lambda_{\gamma}^2 = \rho_1\lambda_u + \rho_2\lambda_w + \rho_3\lambda_{\gamma}, \\ \|\epsilon_h\|_{\Pi}^2 &= \sum_{i=0}^{N-1} \|\epsilon_{i+1/2}\|_{\Pi}^2. \end{aligned}$$

5 Апостеріорні оцінки збіжності: числові експерименти

Доповнимо наші теоретичні результати даними числових експериментів з моделлю циліндричної оболонки товщини $t = 0.0025$ м, радіусом серединної поверхні $R = 0,5$ м, довжиною $L = 1$ м під дією зовнішнього поверхневого навантаження $f_u = 0$, $f_w = -1000$ Па, $f_{\gamma} = 0$. Модуль пружності матеріалу оболонки $E = 10^9$ Па і коефіцієнт Пуассона $\nu = 0$; її торці $z = 0$ і $z = L$ жорстко закріплені. За цих умов критерій подібності набуває значення

$$\mathcal{N} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \frac{R}{L} \frac{t}{L} \approx 0,0005,$$

що сигналізує про сингулярну збуреність її напружено-деформованого стану в околах торців оболонки.

Наша мета — проаналізувати показники ефективності та надійності АОП частинами квадратичних апроксимацій МСЕ, які обчислювалися на послідовності рівномірно згущуваних сіток скінченних елементів до досягнення такого критерію точності:

$$\delta_n := \frac{\|\epsilon_n\|_{\Pi}}{\|\psi_n\|_{\Pi}} \cdot 100\% \leq \text{tol} = 1\%.$$

Одержані результати обчислювальних експериментів внесені до табл. 1, де

$$p_{n+1} := (\ln \|\epsilon_n\|_{\Pi} - \ln \|\epsilon_{n+1}\|_{\Pi}) / (\ln N_{n+1} - \ln N_n).$$

Аналіз даних табл. 1 виявляє кілька важливих закономірностей. Послідовність апроксимацій демонструє монотонну збіжність усіх складових, причому порядок збіжності АОП зростає до чотирьох. Більш того, отримані результати демонструють ефект суперзбіжності — порядок збіжності норм апроксимацій перевищує теоретично очікуваний апіорними оцінками.

Особливо показовим є порівняння обчислювальних витрат: для досягнення апроксимації розв'язку з толерантністю до похибки на рівні 1% кусково квадратичним апроксимаціям МСЕ достатньо **224 скінченних елементів**, тоді як рівномірна сітка потребує **2560 елементів** — тобто більш ніж у 11 разів більше. Це переконливо демонструє суттєво вищу ефективність квадратичних базисних функцій порівняно з рівномірним підходом, особливо в умовах сингулярної збуреності задачі з примежовими шарами в околах защемлених торців оболонки.

Нижче на рис. 1–4 ми подаємо результати обчислень, одержані на останньому кроці нашого уточнення апроксимацій МСЕ на сітці з $N_{10} = 224$ скінченних елементів.

Висновки. У статті розроблено та досліджено числову методику розв'язання задачі статики циліндричної оболонки Тимошенка, яка включає:

n	N_n	$\ \psi_n\ _{\Pi}$	$\ \epsilon_n\ _{\Pi}$	$\delta_n, \%$	p_n
0	20	2,91025	4,44112	201,085	—
1	30	2,93886	2,64888	215,073	2,55
2	44	2,93990	1,21475	155,843	3,29
3	68	2,94002	0,441056	65,9490	3,77
4	100	2,94003	0,129326	18,6474	4,39
5	154	2,94003	0,0359371	4,54144	4,72
6	184	2,94003	0,0197677	1,09245	4,88
7	208	2,94003	0,0165043	1,06070	4,78
8	216	2,94003	0,0154421	1,01158	4,76
9	222	2,94003	0,014689	1,00413	4,75
10	224	2,94003	0,0144363	0,991085	4,74

Табл. 1. Збіжність послідовності кусково квадратичних апроксимацій та глобальних показників апостеріорних оцінювачів їхніх похибок в термінах енергетичної норми.

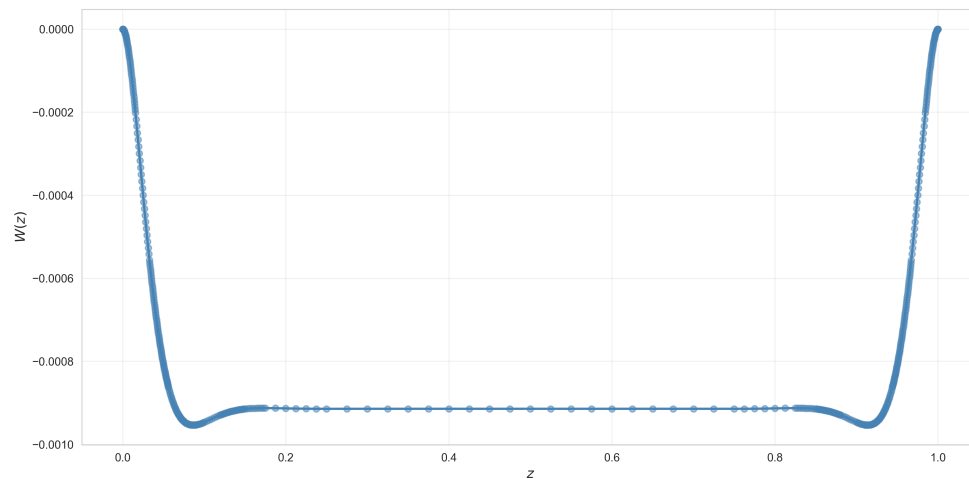


Рис. 1. Розподіл прогину $W(z)$ вздовж меридіана оболонки.

- (i) алгоритм МСЕ з кусково квадратичними апроксимаціями вектора узагальнених зміщень, внески кожного скінченного елемента до якого обчислено аналітично за допущення сталих даних задачі на елементі, що усуває потребу в чисельному інтегруванні;
- (ii) поелементно визначений апостеріорний оцінювач похибок залишкового гатунку на основі кубічних поліномів, коефіцієнти індикаторів якого пропорційні кубу діаметрів скінчених елементів і відтворюють наближені значення третіх похідних зміщень у центрах елементів;
- (iii) апостеріорні оцінки збіжності послідовності квадратичних апроксимацій МСЕ, які демонструють надійне відтворення нижньої межі істинної похибки в енергетичній нормі задач.

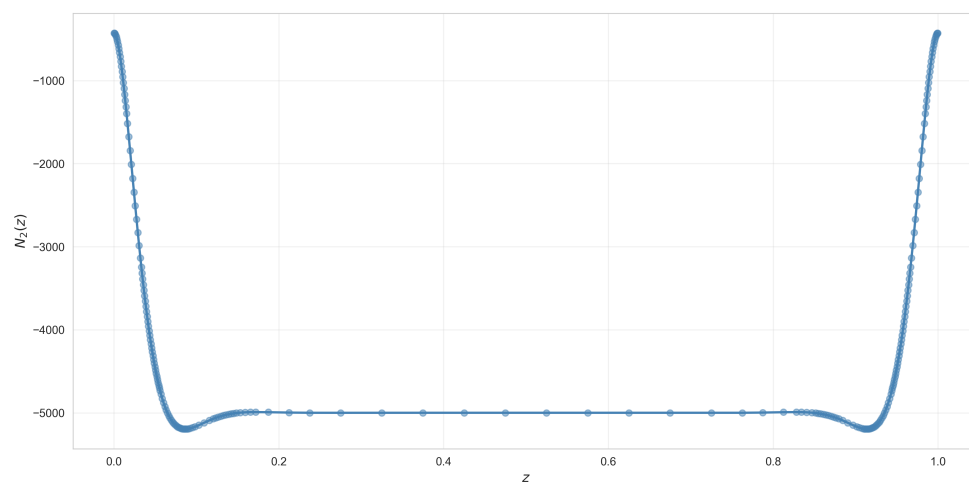


Рис. 2. Розподіл кільцевого зусилля $N_2(z)$ вздовж меридіана оболонки.

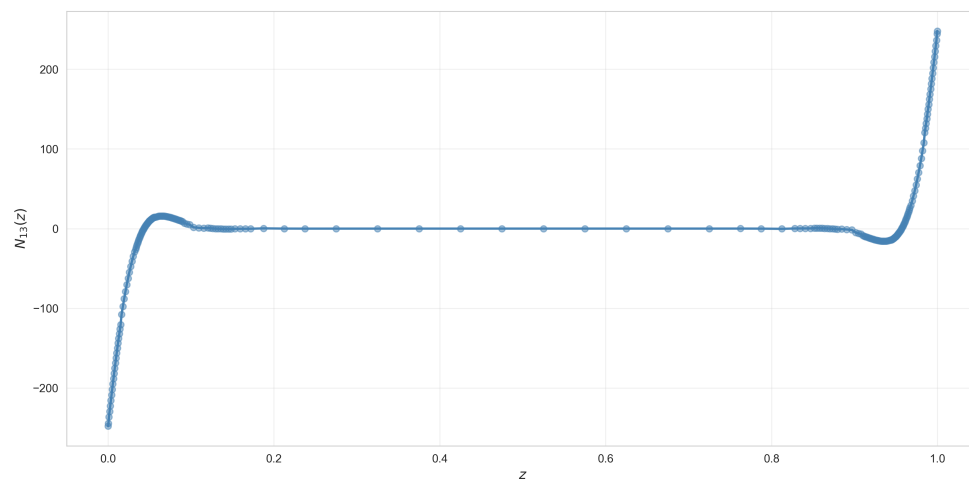


Рис. 3. Розподіл перерізувального зусилля $N_{13}(z)$ вздовж меридіана оболонки.

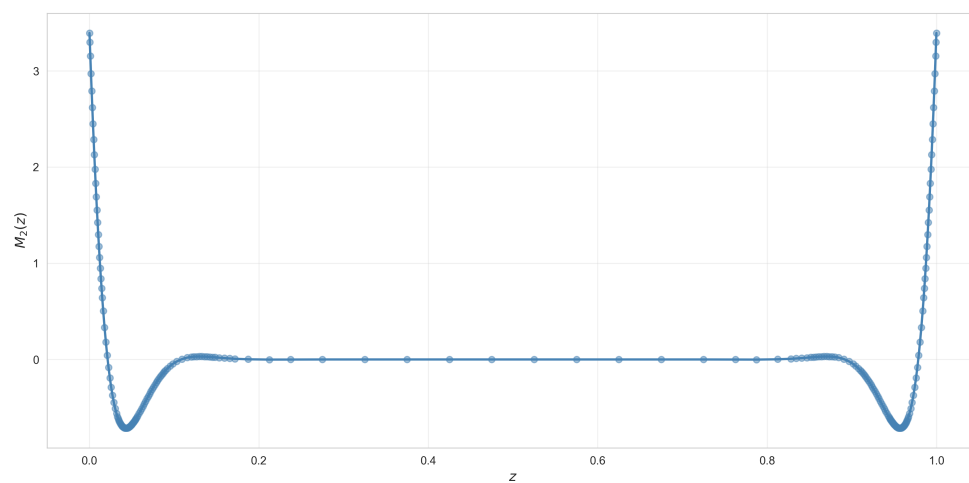


Рис. 4. Розподіл згинального моменту $M_1(z)$ вздовж меридіана оболонки.

Список використаних джерел

- [1] Абрамов Є., Ліпіна О., Шинкаренко Г., Ямелинець А., Кусково-лінійні апроксимації h -адаптивного методу скінченних елементів для одновимірних крайових задач, *Вісн. Львівс. ун-ту. Сер. приклад. матем. інформ.* **11** (2006), 3–189.
- [2] Вагін П.П., Іванова Н.В., Шинкаренко Г.А., Постановка, розв'язуваність та апроксимація варіаційних задач статички зсувних оболонок, *Матем. методи фіз.-мех. поля* **42** (1999), по. 2, 53–61.
- [3] Григоренко Я.М., Савула Я.Г., Муха І.С., Лінійні та нелінійні задачі пружного деформування оболонок складної форми та методи їх чисельного розв'язання, *Приклад. мех.* **36** (2000), по. 8, 3–27.
- [4] Квасниця Г., Малашняк П., Шинкаренко Г., [Порівняння \$h\$ -адаптивних схем МСЕ різних порядків для одновимірних крайових задач](#), *Вісн. Львівс. ун-ту. Сер. приклад. матем. інформ.* **30** (2022), 45–59.
- [5] Шинкаренко Г., Малашняк П., [Аналіз \$h\$ -адаптивного методу скінченних елементів в задачі статички циліндричних оболонок: I. Коректність осесиметричного варіаційного формулювання](#), *Фіз.-матем. модел. інформ. техн.* **40** (2025), 27–36.
- [6] Шинкаренко Г., Малашняк П., Аналіз h -адаптивних апроксимацій МСЕ в задачах статички циліндричних оболонок, у Математичні проблеми механіки неоднорідних структур, Зб. наук. праць, Львів, 2024, 41–42.
- [7] Трушевський В.М., Шинкаренко Г.А., Щербина Н.М., Метод скінченних елементів і штучні нейронні мережі. Теоретичні аспекти і застосування, Львів, 2014.
- [8] Ainsworth M., Oden J.T., [A posteriori error estimation in finite element analysis](#), John Wiley & Sons, 2000.
- [9] Babuška I., Whiteman J.R., Strouboulis T., Finite elements: An introduction to the method and error estimation, Oxford University Press, 2011.
- [10] Babuška I., Rheinboldt W., [Error estimates for adaptive finite element computations](#), *SIAM J. Numer. Anal.* **15** (1978), 736–754.
- [11] Babuška I., Strouboulis T., [The finite element method and its reliability](#), Oxford University Press, 2001.
- [12] Szabó B., Babuška I., [Introduction to finite element analysis: Formulation, verification and validation](#), John Wiley & Sons, 2011.
- [13] Brenner S.C., Scott L.R., [The mathematical theory of finite element methods](#), 3rd ed., Springer, New York, 2008.
- [14] Ciarlet P.G., [The finite element method for elliptic problems](#), SIAM, Philadelphia, PA, 2002.
- [15] Chamoine L., Legoll F., [An introductory review on a posteriori error estimation in finite element computations](#), *SIAM Review* **65** (2023), no. 4, 917–1197.
- [16] Radwańska M., Stankiewicz A., Wosatko A., Pamin J., [Plate and shell structures: Selected analytical and finite element solutions](#), John Wiley & Sons, 2017.
- [17] Segeth K., [A review of some a posteriori error estimates for adaptive finite element methods](#), *Math. Comput. Simul.* **80** (2010), 1589–1600.
- [18] Verfürth R., A review of a posteriori error estimates and adaptive mesh-refinement techniques, Wiley-Teubner, New York, 1996.

Development of the h -adaptive finite element method with piecewise quadratic approximations for cylindrical shell statics

Pavlo O. MALASHNYAK

E-mail: pavlo.malashnyak@lnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-0343-8377>

Ivan Franko National University of Lviv, Ukraine

Received March 31, 2026, in the final form June 16, 2026

<https://doi.org/10.3842/kau.2026.math.03>

Abstract. A computational framework is developed for the finite element analysis of a Timoshenko cylindrical shell subject to axisymmetric loading, formulated as a variational equilibrium problem. Closed form algebraic expressions for the element stiffness contributions to the block tridiagonal system of equations are obtained analytically for piecewise quadratic shape functions, bypassing the need for numerical quadrature. A local residual-based a posteriori error estimator (APEE) is constructed elementwise, with indicators built from cubic correction polynomials whose coefficients scale with the third power of the mesh spacing and capture approximate third order displacement derivatives at element midpoints. Performance of the scheme is assessed through numerical experiments on a rigidly clamped shell with pronounced boundary layer behaviour near the supports: uniform mesh refinement studies show that the APEE accurately tracks the actual FEM discretisation errors measured in the energy norm.

Keywords: finite element method; cylindrical shell; quadratic approximations; a posteriori error estimator; h -adaptivity; energy norm