

Владислав Геннадійович Юрашев, @Vladislav_yur

**Розв'язки кваліфікаційних задач
просунутий рівень (9–11 класи)**

Задача 1. Про натуральні числа $a_1, \dots, a_n$ ($n \geq 3$) відомо, що

$$\text{НСД}(a_1, a_2) \cdot \text{НСД}(a_2, a_3) \cdots \text{НСД}(a_{n-1}, a_n) \cdot \text{НСД}(a_n, a_1)$$

є квадратом натурального числа. Довести, що

$$\text{НСК}(a_1, a_2) \cdot \text{НСК}(a_2, a_3) \cdots \text{НСК}(a_{n-1}, a_n) \cdot \text{НСК}(a_n, a_1)$$

також є квадратом натурального числа.

Розв'язання. Як відомо для будь-яких $m, n \in \mathbb{N}$ виконується рівність

$$\text{НСД}(m, n) \cdot \text{НСК}(m, n) = m \cdot n.$$

Позначимо

$$a^2 = \text{НСД}(a_1, a_2) \cdot \text{НСД}(a_2, a_3) \cdots \text{НСД}(a_{n-1}, a_n) \cdot \text{НСД}(a_n, a_1), \quad a \in \mathbb{N}$$

і

$$b = \text{НСК}(a_1, a_2) \cdot \text{НСК}(a_2, a_3) \cdots \text{НСК}(a_{n-1}, a_n) \cdot \text{НСК}(a_n, a_1).$$

Тоді

$$a^2 \cdot b = a_1 \cdot a_2 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_{n-1} \cdot a_n \cdot a_n \cdot a_1 = (a_1 \cdot a_2 \cdots a_n)^2.$$

Отже,

$$b = \left(\frac{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}{a} \right)^2.$$

Нехай

$$\frac{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}{a} = \frac{p}{q}, \quad \text{де} \quad \text{НСД}(p, q) = 1.$$

Тоді

$$b = \frac{p^2}{q^2}.$$

Оскільки $\text{НСД}(p^2, q^2) = 1$ і $\frac{p^2}{q^2} \in \mathbb{N}$, то $q^2 = 1$. Тобто $b = p^2$ — квадрат натурального. Доведено. $\square$

Задача 2. Чи існує множина S , яка складається із 100 різних точок площини, така, що центр мас будь-яких 10 різних точок множини також належить множині S ?

Задача 3. Знайти кількість трійок дійсних чисел (x, y, z) кожна з яких задовольняє системі

$$\begin{cases} x + y^2 + z^4 = 0, \\ y + z^2 + x^4 = 0, \\ z + x^2 + y^4 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Розв'язання. Запишемо систему (1) у вигляді

$$\begin{cases} x = -y^2 - z^4, \\ y = -z^2 - x^4, \\ z = -x^2 - y^4. \end{cases} \quad (2)$$

Бачимо, що $x \leq 0$, $y \leq 0$, $z \leq 0$. Тому можемо зробити заміну $a = -x$, $y = -b$, $z = -c$, де $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$. Тоді системи (2) набуває вигляду

$$\begin{cases} a = b^2 + c^4, \\ b = c^2 + a^4, \\ c = a^2 + b^4. \end{cases} \quad (3)$$

Оскільки система (3) симетрична, то без обмеження загальності можна вважати, що $a = \max\{a, b, c\}$. Тоді маємо два випадки:

1) $a \geq b \geq c$, тоді $a^2 + b^4 \geq b^2 + c^4 \xrightarrow{(3)} c \geq a$, тобто $a = b = c$.

2) $a \geq c \geq b$, тоді $c^2 + a^4 \geq b^2 + c^4 \xrightarrow{(3)} b \geq a$, знову $a = b = c$.

Як бачимо у будь-якому випадку $a = b = c$, тобто $x = y = z$. Тоді система рівносильна рівнянню

$$x + x^2 + x^4 = 0 \Leftrightarrow x(1 + x + x^3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ 1 + x + x^3 = 0. \end{cases}$$

$f(x) = 1 + x + x^3$ — зростаюча функція на $(-\infty; \infty)$, $f(-1) = -1 < 0$, $f(0) = 1 > 0$. Тому існує $t \in (-1; 0)$, що $f(t) = 0$. Враховуючи, що функція $f(x)$ зростає на $(-\infty; \infty)$ маємо, що t — єдиний корінь рівняння $1 + x + x^3 = 0$. Тому система має два розв'язки.

Відповідь: два розв'язки. □

Задача 4. При яких натуральних n у виразі

$$*1^2 * 2^2 * 3^2 * \dots * n^2$$

замість $*$ можна розставити знаки “+” або “−” таким чином, щоб у результаті отримати 0?

Розв’язання. Нехай $n = 8k + 7$, де $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Якщо $k = 0$, то знаки можна розставити наступним чином

$$1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 - 6^2 + 7^2 = 0.$$

Помітимо, що для будь-якого $x \in \mathbb{R}$:

$$x^2 - (x+1)^2 - (x+2)^2 + (x+3)^2 - (x+4)^2 + (x+5)^2 + (x+6)^2 - (x+7)^2 = 0.$$

База індукції при $k = 0$ доведена. Припустимо, що при $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$0 = x_1 \cdot 1^2 + x_2 \cdot 2^2 + x_3 \cdot 3^2 + \dots + x_{8m+7} \cdot (8m+7)^2,$$

де $x_i \in \{-1; 1\}$ для будь-якого $i = 1, \dots, 8m+7$. Тоді знаки можна розставити і при $k = m+1$, оскільки

$$\begin{aligned} 0 &= x_1 \cdot 1^2 + x_2 \cdot 2^2 + x_3 \cdot 3^2 + \dots + x_{8m+7} \cdot (8m+7)^2 \\ &\quad + (8m+8)^2 - (8m+9)^2 - (8m+10)^2 + (8m+11)^2 \\ &\quad - (8m+12)^2 + (8m+13)^2 + (8m+14)^2 - (8m+15)^2. \end{aligned}$$

Крок індукції доведено.

Очевидно, що при $n = 3$ розставити знаки неможливо. Припустимо, що $n = 8k + 3$, де $k \in \mathbb{N}$. Якщо $k = 1$, то знаки можна розставити наступним чином:

$$-1^2 + 2^2 - 3^2 - 4^2 - 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 - 9^2 + 10^2 - 11^2 = 0.$$

Те, що знаки можна розставити для будь-якого $k \in \mathbb{N}$, щоб вийшов 0 можна довести за індукцією. База індукції при $k = 1$ доведена. Припустимо, що при $m \in \mathbb{N}$

$$0 = x_1 \cdot 1^2 + x_2 \cdot 2^2 + \dots + x_{8m+3} \cdot (8m+3)^2,$$

де $x_i \in \{-1; 1\}$ для будь-якого $i = 1, \dots, 8m + 3$. Тоді знаки можна розставити і при $k = m + 1$, оскільки

$$\begin{aligned} 0 = & x_1 \cdot 1^2 + x_2 \cdot 2^2 + \dots + x_{8m+3} \cdot (8m + 3)^2 \\ & + (8m + 4)^2 - (8m + 5)^2 - (8m + 6)^2 + (8m + 7)^2 \\ & - (8m + 8)^2 - (8m + 9)^2 + (8m + 10)^2 - (8m + 11)^2. \end{aligned}$$

Крок індукції доведено.

Очевидно, що при $n = 4$ розставити знаки неможливо. Припустимо, що $n = 8k + 4$, де $k \in \mathbb{N}$. Якщо $k = 1$, то знаки можна розставити наступним чином:

$$1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2 - 9^2 + 10^2 - 11^2 + 12^2 = 0.$$

Те, що знаки можна розставити для будь-якого $k \in \mathbb{N}$, щоб вийшов 0 можна довести за індукцією. База індукції при $k = 1$ доведена. Припустимо, що при $m \in \mathbb{N}$

$$0 = x_1 \cdot 1^2 + x_2 \cdot 2^2 + \dots + x_{8m+4} \cdot (8m + 4)^2,$$

де $x_i \in \{-1; 1\}$ для будь-якого $i = 1, \dots, 8m + 4$. Тоді знаки можна розставити і при $k = m + 1$, оскільки

$$\begin{aligned} 0 = & x_1 \cdot 1^2 + x_2 \cdot 2^2 + \dots + x_{8m+3} \cdot (8m + 4)^2 \\ & + (8m + 5)^2 - (8m + 6)^2 - (8m + 7)^2 + (8m + 8)^2 \\ & - (8m + 9)^2 + (8m + 10)^2 + (8m + 11)^2 - (8m + 12)^2. \end{aligned}$$

Крок індукції доведено.

Припустимо, що $n = 8k$, де $k \in \mathbb{N}$. Тоді

$$\begin{aligned} 0 = & \sum_{i=1}^k ((8i - 7)^2 - (8i - 6)^2 - (8i - 5)^2 + (8i - 4)^2 - (8i - 3)^2 \\ & + (8i - 2)^2 + (8i - 1)^2 - (8i)^2). \end{aligned}$$

Таким чином, розставити знаки так, щоб вийшов 0 можна при довільном $n \in \mathbb{N}$, такому, що $n : 4$ та $n \geq 8$ або $n \equiv 3 \pmod{4}$ та $n \geq 7$.

Залишилось розглянути випадки, коли $n \equiv 1 \pmod{4}$ та $n \equiv 2 \pmod{4}$. Очевидно, що заміна будь-якого знаку з “+” на “-” у виразі $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ не змінює парності (непарності) цього виразу.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

— непарне число, якщо $n \equiv 1 \pmod{4}$ або $n \equiv 2 \pmod{4}$. Отже, при $n \equiv 1 \pmod{4}$ або $n \equiv 2 \pmod{4}$ отримати 0 не виходить.

Відповідь: $n = 4k$, де $k \geq 2$ або $n = 4k + 3$, де $k \geq 1$. □

Задача 5. Іван і Андрій грають у гру. Першим ходить Іван. У ряд розташовано n лунок ($n \geq 2$), причому k самих лівих з них зайнято металевими кульками ($1 \leq k \leq n - 1$). За хід гравець може взяти кульку з довільної непорожньої лунки і перекласти її в будь-яку порожню лунку, яка знаходиться правіше тієї, з якою гравець взяв кульку. Гра продовжується до тих пір, поки k самих правих лунок не опиняться заповненими. Знайти всі пари $(n; k)$ при яких Іван має виграшну стратегію.

Задача 6. Знайти всі пари цілих чисел $(x; y)$ для кожної з яких виконується рівність $x^2 - y^3 = 1$.

Задача 7. Знайти геометричне місце центрів рівносторонніх трикутників, що вписані в заданий рівнобедрений трикутник.

Задача 8. Довести, що вирази $\frac{x^7 + y^7}{x + y}$ та $\frac{x^7 - y^7}{x - y}$ можна представити у вигляді $t^2 + 7u^2$, а вирази $\frac{x^{11} + y^{11}}{x + y}$ та $\frac{x^{11} - y^{11}}{x - y}$ — у вигляді $t^2 + 11u^2$, причому t та u раціонально виражаються через x та y .

Задача 9. Діагоналі чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці O . Значення площ трикутників AOB , BOC і COD позначимо відповідно через a , b і c . M , N , K , L — відповідно середини сторін AB , BC , CD і DA . P — точка обрана всередині чотирикутника $ABCD$. Значення площ чотирикутників $PMAL$, $PMBN$, $PNCK$ позначимо відповідно через x , y і z . Виразити через a , b , c , x , y , z площу чотирикутника $PKDL$.

Задача 10. На дощці $n \times n$ ($n > 1$) відмічено k клітинок. Необхідно переставити рядки і стовпці так, щоб всі відмічені клітинки виявилися не нижче головної діагоналі. При якому найбільшому k таке гарантовано можливо?